

Übungsblatt Nr. 12

Besprechung in der Woche ab 17.01.

Aufgabe 12.1: CKM-Matrixelemente in den Zerfällen des τ -Leptons

Betrachten Sie das Verhältnis der folgenden Partialbreiten im hadronischen τ -Zerfall:

$$\frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow K^- \nu_\tau)}{\Gamma(\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau)}$$

Erinnerung: K^- -Mesonen sind ein Bindungszustand $(\bar{u}s)$, und π^- -Mesonen $(\bar{u}d)$.

- a) Bei der PDG finden Sie die folgenden gemessenen Verzweigungsverhältnisse: (1 Punkt)
 $\text{BR}(\tau^- \rightarrow K^- \nu_\tau) = 0.7\%$ und $\text{BR}(\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau) = 10.8\%$
Berechnen Sie daraus das obige Verhältnis der Partialbreiten.
- b) Zeichnen Sie die Feynmandiagramme der Zerfälle, beschriften Sie die Vertices mit den relevanten CKM-Elementen, und machen Sie daraus eine Vorhersage für das obige Verhältnis. (2 Punkte)

Aufgabe 12.2: Dichte von Kernen und Neutronensternen

(1 Punkt)

Berechnen Sie näherungsweise die Massendichte von Kernen. Wie schwer wäre ein analoger Neutronenstern in der Größe eines Fußballs (Umfang $u = 70$ cm)?

Aufgabe 12.3: Kernbindungsenergie / Bethe-Weizsäcker-Massenformel

Die Kernmassen inklusive der Bindungsenergien können durch die in der Vorlesung gegebene semi-empirische Formel beschrieben werden.

- a) Bei welcher Protonenzahl hat die Kernmasse für Isobare ein Minimum? Was bedeutet dies für das Verhältnis von Neutronen und Protonen in leichten und schweren Kernen? Zeigen Sie dies für die Massenzahlen $A = 4$, $A = 50$ und $A = 200$. (2 Punkte)
- b) Wieviel Energie wird bei der asymmetrischen Spaltung eines ${}_{90}^{234}\text{Th}$ -Kerns gemäß (2 Punkte)

$$(A, Z) \rightarrow \left(\frac{1}{3}A, \frac{1}{3}Z\right) + \left(\frac{2}{3}A, \frac{2}{3}Z\right)$$

frei?

- c) Wie groß sind die kinetischen Energien und Impulse der beiden Spaltfragmente? (2 Punkte)
- d) Der Atomkern kann als homogen geladene Kugel angesehen werden. Zeigen Sie, dass die Coulomb-Energie einer solchen Kugel (2 Punkte)

$$E = \frac{3}{5} \frac{\alpha Z^2}{R}$$

beträgt.

- e) Berechnen Sie damit den Koeffizienten a_C der Massenformel. (1 Punkt)

- f) ^{27}Si und ^{27}Al sind Spiegelkerne, d.h. ihre Grundzustände sind identisch bis auf die Ladung. (1 Punkt)
Ihre Massendifferenz sei gegeben als $\Delta M = 6 \text{ MeV}$. Berechnen Sie den Kernradius (vernachlässigen Sie die Massendifferenz von Proton und Neutron).

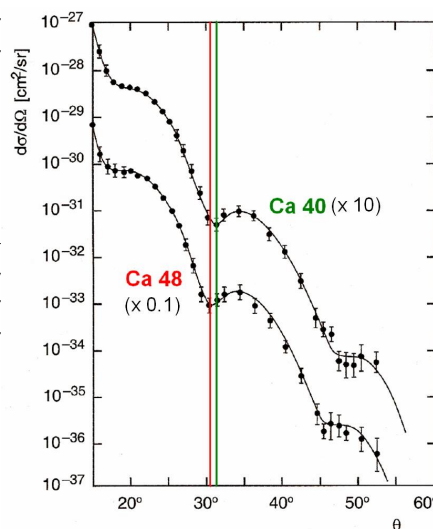
Aufgabe 12.4: Ladungsverteilung in Kernen

In der Vorlesung wurde besprochen, dass der Wirkungsquerschnitt der Streuung von Elektronen an beliebigen Ladungsverteilungen $\rho(\vec{x})$ gegeben ist durch:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\rho} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2,$$

mit dem Wirkungsquerschnitt der Mott-Streuung an einem punktförmigen Streuzentrum und dem Formfaktor $F(\vec{q}^2)$, der nur vom Betrag des räumlichen Anteils des Impulsübertrages $\vec{q}$ abhängt. Außerdem ist der Formfaktor gerade die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung:

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int \rho(\vec{x}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} d^3x \quad \text{mit } q = |\vec{q}| \\ &\rightarrow \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r \rho(r) \sin(qr) dr, \end{aligned}$$



wobei der Übergang in der letzten Zeile im Falle einer radialsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(r)$ gilt. Man kann demnach aus dem Wirkungsquerschnitt auf die Ladungsverteilung schließen.

Im Folgenden soll ein solcher Formfaktor in einem sehr einfachen Modell berechnet werden, in dem die Ladungsverteilung der Protonen in Kernen als homogen verteilt in einer Kugel mit Radius R angenommen wird:

$$\rho(r) = \begin{cases} C & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie die Konstante C aus der Normierungsbedingung (1 Punkt)

$$\int \rho(\vec{x}) d^3x = 1.$$

- b) Berechnen Sie den Formfaktor $F(q^2)$ für die homogene Kern-Ladungsverteilung und skizzieren Sie den Betrag des Formfaktors $|F(q^2)|$ in Abhängigkeit des dimensionslosen Produkts qR . (2 Punkte)
- c) Auf welche ungefähre Ladungsverteilung schließen Sie für Calcium-Kerne anhand des abgebildeten differentiellen Wirkungsquerschnitts? (1 Punkt)