

ELEMENTARE AUSSAGENLOGIK

ELLEN HENKE

Dieser Text soll Ihnen helfen, die logische Struktur von Aussagen (und damit von Beweisen) besser zu verstehen. Außerdem führen wir einige Zeichen ein, die in der mathematischen Praxis gerne als Abkürzungen verwendet werden. Eigentlich muss man korrekterweise unterscheiden zwischen der Sprache der formalen Logik und der „mathematischen Metasprache“, die auf unserer „gewöhnlichen“ Sprache und Intuition für logische Zusammenhänge beruht. Dies wird in diesem Text jedoch nicht erfolgen. Viele Zeichen, die wir als „Abkürzungen“ einführen, haben eine andere Bedeutung in der mathematischen Logik. Wenn Sie eine gewisse Verwirrung empfinden, welche Zusammenhänge als „klar“ gelten können und welche formal bewiesen werden müssen, dann ist das nicht Ihr Fehler, sondern liegt an der eigentlich unzulässigen Vermischung der beiden Ebenen. In der mathematischen Praxis benutzt man die Zusammenhänge, die hier dargestellt werden, tatsächlich normalerweise einfach als „intuitiv klar“.

Zusammenfassend gesagt: Die Ausführungen hier sollen Ihnen helfen, Ihre logische Intuition etwas zu schulen. Sie sollen dagegen auf keinen Fall den Effekt haben, dass Sie Ihrer logischen Intuition nicht mehr trauen!

1. Aussagen

Wir werden zunächst Aussagen betrachten, die wir üblicherweise mit Variablen (z.B. A, B, C) bezeichnen. Beispiele für Aussagen sind „das Gras ist grün“, „alle Elefanten sind rosa“, „ $1 + 2 = 3$ “, „ $4 = 5$ “. Wie Sie an diesen Beispielen beobachten können, sind Aussagen immer entweder wahr oder falsch. Beachten Sie: Ein „Term“ wie z.B. $1 + 2$ ist keine Aussage, da man einem solchen Term keinen „Wahrheitswert“ (d.h. wahr oder falsch) zuweisen würde.

Wenn zwei Aussagen A und B gegeben sind, so kann man daraus neue Aussagen bilden. Z.B.

- „ A oder B “ (auch geschrieben als $A \vee B$);
- „ A und B “ (auch geschrieben als $A \wedge B$);
- „nicht A “ (auch geschrieben als $\neg A$).

Bei dem „oder“ handelt es sich um das „nicht ausschließliche oder“. D.h. die Aussage $A \vee B$ ist wahr falls *mindestens* eine der beiden Aussagen A und B wahr ist. Dagegen ist die Aussage $A \wedge B$ nur dann wahr, wenn *beide* Aussagen A und B wahr sind. Die Aussage $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist.

Schreiben wir W für wahr und F für falsch, so können wir dies schematisch in der folgenden Tabelle erfassen:

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$
W	W	F	W	W
W	F	F	W	F
F	W	W	W	F
F	F	W	F	F

Die Aussage $(\neg A) \vee B$ kürzt man auch durch $A \implies B$ ab und sagt dafür „ A impliziert B “ oder „aus A folgt B “. Außerdem schreibt man $A \iff B$ für die Aussage

$$(A \implies B) \wedge (B \implies A)$$

und sagt dafür „ A und B sind äquivalent“ oder „ A gilt genau dann, wenn B gilt“. Schematisch ist dies in der folgenden Tabelle erfasst:

A	B	$A \implies B$	$A \iff B$
W	W	W	W
W	F	F	F
F	W	W	F
F	F	W	W

Beachten Sie: Ist A falsch, so ist die Aussage $A \implies B$ immer wahr, ganz egal ob B wahr oder falsch ist. Auf lateinisch sagt man auch „ex falso quodlibet“ (bzw. „ex falso sequitur quodlibet“), d.h. aus Falschem folgt Beliebiges. Z.B. ist die folgende Aussage wahr:

$$2 = 3 \implies 7 = 100$$

Von der Tabelle oben kann man auch ablesen: Die Aussage $A \iff B$ ist genau dann wahr, wenn A und B den gleichen Wahrheitswert haben. Beachten Sie wieder: Die Aussage $A \iff B$ ist auch wahr, wenn A und B beide falsch sind. In der Praxis zeigt man die Aussage $A \iff B$ (bzw. „ A gilt genau dann, wenn B gilt“) oft, indem man beide Implikationen einzeln zeigt. Das heißt, man zeigt erst $A \implies B$ und dann $B \implies A$.

2. Logische Regeln und Beweisverfahren

Eine **Tautologie** ist eine „zusammengesetzte Aussage“, die unabhängig von ihren Teilaussagen immer wahr ist. Im mathematischen Alltag werden Tautologien als „logische Regeln“ benutzt. Z.B. sind die Aussagen $(\neg A) \vee A$, $A \wedge B \implies A$, und $A \iff A$ Tautologien. Wichtig zu bemerken ist, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind:

- (1) $(\neg(\neg A)) \iff A$;
- (2) $(A \vee B) \iff (B \vee A)$;
- (3) $(A \wedge B) \iff (B \wedge A)$;
- (4) $(A \implies B) \wedge (B \implies C) \implies (A \implies C)$

Dies sollte intuitiv klar sein.

Sind D und E zusammengesetzte Aussagen, so ist die Aussage $D \iff E$ eine Tautologie genau dann, wenn D und E unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen immer den gleichen Wahrheitswert haben. Dies kann z.B. auch mithilfe einer Wahrheitstabelle überprüft werden. Auf diese Weise kann man Eigenschaften (1),(2),(3) auf rein formale Weise überprüfen.

Dass eine Aussage der Form $D \implies E$ eine Tautologie ist, kann dagegen formal überprüft werden, indem man zeigt, dass, wenn immer D wahr ist, auch E wahr ist. Dass (4) eine Tautologie ist, kann also auch anhand der folgenden Wahrheitstabelle überprüft werden.

A	B	C	$A \implies B$	$B \implies C$	$A \implies B \wedge B \implies C$	$A \implies C$
W	W	W	W	W	W	W
W	F	W	F	W	F	W
F	W	W	W	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F
W	F	F	F	W	F	F
F	W	F	W	F	F	W
F	F	F	W	W	W	W

In der Praxis kann man nach Regel (4) eine Aussage $A \implies B$ zeigen, indem man Aussagen $A_1, \dots, A_n$ findet mit $A_1 = A$, $B = A_n$ und $A_i \implies A_{i+1}$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$. Man nennt dies einen „Kettenschluss“.

Man sagt, dass Aussagen $A_1, A_2, \dots, A_n$ äquivalent sind, falls $A_i \iff A_j$ gilt für alle natürlichen Zahlen $i, j \leq n$. Äquivalent dazu ist, dass für alle $i = 1, 2, \dots, n$ die Implikation $A_i \implies A_{i+1}$ wahr ist und außerdem $A_n \implies A_1$ wahr ist. Auf diese Weise wird häufig die Äquivalenz von Aussagen $A_1, A_2, \dots, A_n$ bewiesen. Dies ist wieder nichts anderes als ein Kettenschluss.

In der Praxis kann man eine Aussage $A \iff B$ manchmal auch zeigen, indem man Aussagen $A = A_1, A_2, \dots, A_n = B$ findet, so dass $A_i \iff A_{i+1}$ gilt für alle natürlichen Zahlen i mit $1 \leq i < n$. Man schreibt dann auch

$$A_1 \iff A_2 \iff \dots \iff A_{n-1} \iff A_n$$

und sagt, dass man die Aussage $A \iff B$ durch eine „Kette von Äquivalenzen“ gezeigt hat. Dieses Verfahren empfiehlt sich allerdings nur, wenn wirklich einfach zu sehen ist, dass die Äquivalenzen $A_i \iff A_{i+1}$ wahr sind. Eventuell begründet man für jede dieser Äquivalenzen kurz warum diese gilt.

Bislang haben wir immer Klammern gesetzt. Um Klammern zu vermeiden, benutzt man folgende Konvention: Die Negation $\neg$ „bindet stärker“ als $\vee$, $\wedge$, $\implies$ und $\iff$. Man schreibt also z.B. $\neg A \wedge B$ für $(\neg A) \wedge B$.

Genauso legen wir fest, dass $\vee$ und $\wedge$ stärker binden als $\implies$ und $\iff$. Z.B. schreibt man also $A \wedge B \iff B \vee C$ für $(A \wedge B) \iff (B \vee C)$.

Lemma 2.1 (De Morgansche Regel). *Seien A und B Aussagen. Dann sind die folgenden Aussagen Tautologien:*

- (a) $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$;
- (b) $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$.

Wieder sollten Sie sich klar machen, dass die Gültigkeit dieser Regeln intuitiv Sinn macht. Sie werden daher im mathematischen Alltag oft verwendet ohne weiter erwähnt zu werden.

Falls man diese Regeln formal überprüfen möchte, so kann man z.B. (b) aus (a) mithilfe einer Kette von Äquivalenzen herleiten (Übung!) und die Gültigkeit von (a) aus der folgenden Wahrheitstabelle ablesen. Um (a) zu zeigen, müssen wir nämlich überprüfen, dass die beiden Aussagen $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ immer den gleichen Wahrheitswert haben.

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
W	W	W	F	F	F	F
W	F	F	W	F	W	W
F	W	F	W	W	F	W
F	F	F	W	W	W	W

Zuletzt noch eine wichtige logische Regel, die oft benutzt wird, um eine Implikation zu zeigen.

Lemma 2.2 (Kontraposition). *Sind A und B Aussagen, so ist die Aussage*

$$(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$$

eine Tautologie.

Beweis. Wir können dies durch die folgende Kette von Äquivalenzen zeigen:

$$\begin{aligned}
 (\neg B \implies \neg A) &\iff \neg(\neg B) \vee \neg A \quad (\text{nach Definition der Implikation}) \\
 &\iff B \vee \neg A \quad (\text{nach (1)}) \\
 &\iff \neg A \vee B \quad (\text{nach (2)}) \\
 &\iff A \implies B \quad (\text{nach Definition der Implikation}).
 \end{aligned}$$

□

Oft wird ein Beweis der Implikation $A \implies B$ mithilfe der Regel oben auch als „Widerspruchsbeweis“ formuliert, in etwa wie folgt: „Angenommen A gilt und B gilt nicht. Wegen ... (*Argumente anführen*) ... gilt A dann nicht, ein Widerspruch.“

3. Existenz- und Allaussagen

Sei M eine Menge. In manchen Zusammenhängen betrachten wir eine **Aussageform** $A(X)$ in einer Variablen X , für die ein beliebiges Element von M eingesetzt werden kann. Das bedeutet, dass $A(X)$ für jedes $X \in M$ eine Aussage ist.

Z.B. ist $X \geq 1$ eine Aussageform, wobei für die Variable X jedes Element der Menge $\mathbb{R}$ eingesetzt werden kann. Ersetzt man X durch ein Element ≥ 1 , so ist die entsprechende Aussage wahr, ansonsten ist sie falsch.

Ist $A(X)$ eine Aussageform, wobei X durch die Elemente der Menge M ersetzt werden kann, so sind die folgenden beiden Ausdrücke Aussagen:

- „Es existiert eine $X \in M$, so dass $A(X)$ gilt“
(auch geschrieben als „ $\exists X \in M: A(X)$ “);
- „Für alle $X \in M$ gilt $A(X)$ “ (auch geschrieben als „ $\forall X \in M: A(X)$ “).

Man bezeichnet eine Aussage von ersterer Form als eine **Existenzaussage** und nennt $\exists$ den **Existenzquantor**. Eine Aussage wie im zweiten Punkt nennt man eine **Allaussage** und nennt $\forall$ den **Allquantor**.

Die Verneinung einer Existenzaussage ist immer äquivalent zu einer Allaussage, und umgekehrt ist die Verneinung einer Allaussage äquivalent zu einer Existenzaussage. Genauer gilt für eine Aussageform $A(X)$ wie oben:

- $\neg(\exists X \in M: A(X)) \iff \forall X \in M: \neg A(X).$
- $\neg(\forall X \in M: A(X)) \iff \exists X \in M: \neg A(X).$

Eine Allaussage „ $\forall X \in M : A(X)$ “ können Sie intuitiv auch als Implikation „ $X \in M \implies A(X)$ “ auffassen. Entsprechend der Regel „ex falso quodlibet“ ist daher die Aussage „ $\forall X \in \emptyset : A(X)$ “ immer wahr, unabhängig von der Aussageform $A(X)$. Beachten Sie auch, dass die Aussage „ $\exists X \in \emptyset : A(X)$ “ immer falsch ist.

4. Abschließende Bemerkungen

Die Zeichen $\vee, \wedge, \neg, \implies, \iff, \exists, \forall$, die wir hier als „Abkürzungen“ eingeführt haben, haben eine andere (aber natürlich verwandte) Bedeutung in der mathematischen Logik. In Texten zur mathematischen Logik sollte die Verwendung dieser Zeichen in der „mathematischen Metasprache“ daher komplett vermieden werden. In anderen mathematischen Texten gilt eine Häufung dieser Symbole auch gemeinhin als schlechter Stil. Ihre Verwendung im „Fließtext“ wird generell vermieden, in abgesetzten Formeln werden sie dagegen manchmal als Abkürzungen benutzt. Dieser Konvention sollten Sie auch beim Aufschrieb Ihrer Übungsaufgaben folgen. Inwieweit die Verwendung der obigen Symbole als passend empfunden wird ist allerdings zugegebenermaßen in verschiedenen mathematischen Fachgebieten etwas unterschiedlich.

Vielleicht finden Sie die Verwendung der Symbole nützlich, wenn Sie sich logische Zusammenhänge durch eine übersichtliche Darstellung klarmachen wollen. Auch an der Tafel werden diese Abkürzungen manchmal praktisch sein. Sie sollten den Tafelanschrieb in der Hinsicht allerdings nicht als Vorbild dafür sehen wie man einen richtigen mathematischen Text schreibt.