

Beispiele zu Kapitel 8

Beispiele zu Lemma 8.34

$$\circ \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 100 & 2 & 2 & 5 \\ 7 & 12 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) (2 \cdot 2 - 1 \cdot 5) = (-2) \cdot (-1) = 2.$$

$$\circ \det \begin{pmatrix} 1 & 12 & 725 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \det((1)) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = (2 \cdot 1 - 4 \cdot 5) = -18.$$

Beispiele zu „Entwicklung der Determinante nach einer Spalte“

3. Spalte
↓

② $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+ & 1 \\ 3 & 5 & \underline{2-} & 1 \\ 4 & 1 & 5+ & 6 \\ 3 & 1 & 1- & 2 \end{pmatrix}$

$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

↗
Entwicklung
nach 3. Spalte

$+ 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$= \dots$

Entwicklung nach 2. Spalte

$$\textcircled{a} \det \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \underline{0} & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\downarrow}{=} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -5$$

Beispiel zu "Entwicklung nach einer Zeile":

Entwicklung nach 3. Zeile

$$\textcircled{a} \det \begin{pmatrix} +1 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 \\ +0 & \underline{2} & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\downarrow}{=} (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot (2 - 15) = 26$$

$$\textcircled{a} \det \begin{pmatrix} +1 & 2 & 3 \\ -5 & +4 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach 2. Zeile

$$\stackrel{\downarrow}{=} -5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (-5) \cdot 4 + 4 \cdot 2 = -20 + 8 = -12.$$

Beispiel zu Satz 8.40/Satz 8.41

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

Entwicklung nach 3. Zeile

$$\begin{aligned} \det(A) &\stackrel{\downarrow}{=} (-1) \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -(1 - 3) = 2. \end{aligned}$$

Beachte: Man könnte A auch als Matrix mit Einträgen in $\mathbb{Z}$ betrachten.

$\det(A) = 2 \in \mathbb{Z}$ ist nicht invertierbar in $\mathbb{Z}$

Damit ist A nicht invertierbar als Matrix in $M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$.

Aber: A ist invertierbar in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{Q}$,
d.h. A ist invertierbar als Matrix in
 $M_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$ oder in $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

In diesen Ringen können wir das Inverse
von A mit der Formel oben bestimmen!

Berechne die Matrix α der Kofaktoren:

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-3) = 3$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 = -1$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (1-3) = 2$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

↗

Matrix der Kofaktoren

$$\alpha^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Inversen

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot \alpha^t$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \alpha^t$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stimmt also!