

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der zehnten Übung. Der späteste Abgabetermin ist der 06.01. um 16:40 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem zehnten Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 10* finden.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Gegeben sind die folgenden Matrizen mit Einträgen aus dem Körper $\mathbb{Z}/5$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der Produkte XY mit $X, Y \in \{A, B, C\}$ sind definiert? Berechnen Sie alle Produkte, die definiert sind. Geben Sie dabei alle Matrixeinträge in der Form k mit $0 \leq k \leq 4$ an.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und seien

$$D_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0_K \\ 0_K & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in K \setminus \{0_K\} \right\}$$

und

$$D_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0_K \\ 0_K & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in K \right\}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass D_1 zusammen mit der üblichen Multiplikation von Matrizen eine abelsche Gruppe ist.
- (ii) Ist auch D_2 zusammen mit der üblichen Multiplikation von Matrizen eine Gruppe?

Aufgabe 4

Prüfen Sie jeweils, ob es sich um eine lineare Abbildung handelt. Falls dies der Fall ist, entscheiden Sie, welche der Begriffe aus Definition 6.12 auf die jeweilige Abbildung zutreffen.

(i) $\varphi_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3y \\ z + 2x \end{pmatrix}.$

(ii) $\varphi_b : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3y \\ z + 1 \end{pmatrix}.$

(iii) $\varphi_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 3x + 4y.$

Aufgabe 5

Sei K ein Körper und seien $m, n, l \in \mathbb{N}$.

- (i) Zeigen Sie, dass $(AB)^t = B^t A^t$ für alle $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ und $B \in \mathcal{M}_{n \times l}(K)$.
- (ii) Zeigen Sie, dass $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$ für alle $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$.
- (iii) Zeigen Sie, dass $A(B+C) = AB+AC$ für alle $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ und alle $B, C \in \mathcal{M}_{n \times l}(K)$.
Bemerkung: Man kann analog zeigen, dass $(B+C)A = BA + CA$ für alle $B, C \in \mathcal{M}_{n \times l}(K)$ und $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$.

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 12.01., 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Gegeben sind die folgenden Matrizen mit Einträgen aus dem Körper $\mathbb{Z}/3$.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Welche der Produkte AA , AB , BA und BB sind definiert? Berechnen Sie alle definierten Produkte. Geben Sie dabei alle Matrixeinträge in der Form k mit $0 \leq k \leq 2$ an.

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1_K & a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} : a \in K \right\}.$$

Zeigen Sie, dass H zusammen mit der üblichen Multiplikation von Matrizen eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

ein Automorphismus ist.

2. Ist die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}$$

ebenfalls linear?

Zusatzaufgaben

Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgabe wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung zu präsentieren.

Aufgabe 9

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Eine Teilmenge $I \subseteq R$ heißt *Ideal*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. I ist eine Untergruppe von $(R, +)$,
2. für alle $r \in R$ und $a \in I$ gilt $ra \in I$ und $ar \in I$.

Es lässt sich leicht einsehen, dass $\{0_R\}$ und R Ideale sind. Der Ring $(R, +, \cdot)$ heißt *einfach*, falls es keine weiteren Ideale gibt, also falls $\{0_R\}$ und R seine einzigen Ideale sind.

Sei nun K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 5.7 ist $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen ein Ring. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ einfach ist.