

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der elften Übung. Der späteste Abgabetermin ist der 13.01 um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem elften Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 11* finden.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie Lemma 6.21, um zu überprüfen, ob φ ein Monomorphismus ist.

Aufgabe 3

Sei

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y - w \\ 2x \\ z + w \\ x + z + w \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ und sei

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- (a) Zeigen Sie, dass f linear ist (*Hinweis: Dies können Sie durch direktes Nachrechnen oder unter Verwendung von Beispiel 6.5 zeigen*).
- (b) Berechnen Sie $\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{E})$.
- (c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.
- (d) Berechnen Sie $\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{B})$.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Abbildung f aus Aufgabe 3. Sei $\mathcal{E}$ wieder die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$.

- (a) Bestimmen Sie $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$ sowie eine Basis von $\text{Kern}(f)$ und eine Basis von $\text{Bild}(f)$. Welche Dimensionen haben $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$?
- (b) Hätten Sie $\dim(\text{Bild}(f))$ auch bestimmen können, ohne $\text{Bild}(f)$ zu berechnen? Wenn ja, wie?
- (c) Sei $m := \dim(\text{Kern}(f))$. Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^4$, so dass die letzten m Spalten von $\text{Mat}(f, \mathcal{C}, \mathcal{E})$ nur Nullen enthalten.
- (d) Finden Sie Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ von $\mathbb{R}^4$, so dass

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Sei K ein Körper.

- (i) (*Zum Selbststudium*) Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Nach Beispiel 3.3 ist $\mathcal{M}_{n \times m}(K)$ ein Vektorraum über K . Für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ sei E_{ij} die Matrix aus $\mathcal{M}_{n \times m}(K)$, deren (i, j) -Eintrag gleich 1 ist, während alle anderen Einträge gleich 0 sind. Machen Sie sich klar, dass $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ eine Basis von $\mathcal{M}_{n \times m}(K)$ ist.
- (ii) Sei nun $V := \mathcal{M}_{2 \times 2}(K)$. Nach (i) ist

$$\mathcal{E} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von V . Sei

$$x := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V.$$

Weiter sei

$$\psi_x : V \longrightarrow V, y \mapsto xyx.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung ψ_x linear ist.
- (b) Bestimmen Sie $\text{Mat}(\psi_x, \mathcal{E})$.

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 19.01.2022, 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ 2y - t \end{pmatrix}.$$

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass f linear ist. Sie dürfen dies ohne Beweis verwenden.

Sei außerdem

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - t = 0 \right\}.$$

- (a) Berechnen Sie $\text{Kern}(f)$, $\text{Bild}(f)$ sowie die Dimensionen von $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$.
- (b) Finden Sie eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $\text{Kern}(g) = W$. Gibt es eine Abbildung g mit dieser Eigenschaft, so dass g nicht surjektiv ist?
- (c) Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}$, $\mathcal{E}_2$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{E}_4$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$. Berechnen Sie $\text{Mat}(f, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_2)$ sowie $\text{Mat}(g, \mathcal{E}_4, \mathcal{E})$.

Aufgabe 7 (1 Punkt)

Gegeben ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - z \\ y - z \\ 0 \\ x - y \end{pmatrix}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass φ eine lineare Abbildung ist. Dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden. Nutzen Sie Lemma 6.21, um zu überprüfen, ob φ sogar ein Monomorphismus ist.

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Beispiel 3.3 ist $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ ein Vektorraum über K . Sei

$$T : \mathcal{M}_{n \times n}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(K), A \mapsto A^t - A.$$

- (i) Zeigen Sie, dass T linear ist. (*Hinweis: Sie benötigen in Ihrem Beweis die Aussagen aus Beispiel 6.10. Diese dürfen Sie, wie alle Resultate der Vorlesung, ohne Beweis verwenden.*)
- (ii) Folgern Sie aus (i) und aus einem geeigneten Lemma aus der Vorlesung, dass

$$\{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K) \mid A = A^t\}$$

ein Unterraum von $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ ist.

Zusatzaufgabe

Die folgenden Aufgaben stellen besondere Herausforderungen dar. Die Aufgaben werden nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung präsentieren.

Aufgabe 9

Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) = 2$, sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $\alpha \in \text{Hom}(V, V)$ mit $\alpha \circ \alpha = \text{id}_V$. Setze $\text{Fix}(\alpha) := \{v \in V \mid \alpha(v) = v\}$. Man zeige, dass $\text{Fix}(\alpha)$ ein Unterraum von V mit $\dim(\text{Fix}(\alpha)) \geq \frac{1}{2} \dim(V)$ ist.

Aufgabe 10

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ und sei $V^* := \text{Hom}(V, K)$. Dann ist V^* ein Vektorraum über K , wobei die Addition durch

$$(f + g) : V \rightarrow K, v \mapsto f(v) + g(v)$$

für $f, g \in V^*$ und die Skalarmultiplikation

$$(\lambda f) : V \rightarrow K, v \mapsto \lambda f(v)$$

für $f \in V^*$ und $\lambda \in K$ gegeben ist. Dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden. Man nennt V^* den *Dualraum* von V .

Beweisen Sie, dass $V \cong V^*$ gilt. Wählen Sie dazu eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und zeigen Sie, dass die linearen Abbildungen

$$\eta_i : V \longrightarrow K, v_j \mapsto \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j, \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

eine Basis von V^* bilden (wenn Sie die Definition von η_i nicht verstehen, dann wiederholen Sie Lemma 6.22). Wenden Sie nun ein geeignetes Korollar aus der Vorlesung an, um zu schließen, dass $V \cong V^*$ gilt.