

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der zwölften Übung. Der späteste Abgabetermin ist der 20.01 um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem zwölften Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 12* finden.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y & x + 5z \\ x + y & z \end{pmatrix}$$

und

$$g : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), A \mapsto A^t - A$$

und

$$h : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a + b \\ b + 5c \\ c + d \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung g ist nach Aufgabe 8 auf Blatt 11 linear. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass auch f und h linear sind. Dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden. Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Sei außerdem

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Nach Aufgabe 5 (i) auf Blatt 11 ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (i) Berechnen Sie $\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{B})$.

- (ii) Berechnen Sie $\text{Mat}(g, \mathcal{B})$.
- (iii) Berechnen Sie $\text{Mat}(h, \mathcal{B}, \mathcal{E})$.
- (iv) Nutzen Sie (i), (ii) und (iii), um eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ zu bestimmen, so dass

$$(h \circ g \circ f)(x) = Ax$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3

Nach Aufgabe 8 (ii) auf Blatt 11 ist

$$W := \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$$

ein Unterraum von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow W, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & 5(-x + y - z) \\ 5(-x + y - z) & z \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass φ linear ist.

Sei weiterhin $\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

- (i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
- (ii) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}_W$ von W .
- (iii) Berechnen Sie $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}_W)$.
- (iv) Folgern Sie aus (iii), dass φ ein Isomorphismus ist.
- (v) Können Sie, anstatt (ii) zu verwenden, auch unter Verwendung von Lemma 6.23 zeigen, dass φ ein Isomorphismus ist?

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$. Zeigen Sie: Ist A invertierbar, so ist A^t invertierbar und das Inverse von A^t ist $(A^{-1})^t$. Insbesondere ist A invertierbar genau dann, wenn A^t invertierbar ist.

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 26.01.2022, 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gegeben sind die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y & 2z \\ z-x & 2x-z \end{pmatrix}$$

und

$$g : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

und

$$h : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ b+3c \\ b+d \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Abbildungen f , g und h linear sind. Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Es ist $\mathcal{B}$ nach Aufgabe 5 (i) auf Blatt 11 eine Basis von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (i) Berechnen Sie $\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{B})$.
- (ii) Berechnen Sie $\text{Mat}(g, \mathcal{B})$.
- (iii) Berechnen Sie $\text{Mat}(h, \mathcal{B}, \mathcal{E})$.
- (iv) Nutzen Sie (i), (ii) und (iii), um eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ zu finden, so dass

$$(h \circ g \circ f)(x) = Ax$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

- (v) Zeigen Sie, dass g ein Automorphismus von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ist. (*Hinweis: Da Sie die Linearität von g ohne Beweis verwenden dürfen, müssen Sie nur zeigen, dass g bijektiv ist. Dazu reicht es wiederum, zu zeigen, dass g eine Umkehrabbildung besitzt. Und eine solche können Sie finden, wenn Sie sich die in der Definition von g auftauchende Matrix anschauen und sich an Ihre Lösung von Aufgabe 7 auf Blatt 10 erinnern.*)
- (vi) Nutzen Sie (v) und Satz 7.11, um zu zeigen, dass $\text{Mat}(g, \mathcal{B})$ invertierbar ist und um das Inverse zu bestimmen.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Ein Element $a \in R$ heißt *invertierbar*, falls ein $a^* \in R$ mit $aa^* = 1_R = a^*a$ existiert. Ein solches Element a^* wird dann ein Inverses von a genannt.

- (i) Zeigen Sie: Wenn $a \in R$ invertierbar ist, dann ist das Inverse von a eindeutig bestimmt. (*Bemerkung: Das eindeutig bestimmte Inverse eines invertierbaren Elements a von R wird mit a^{-1} bezeichnet.*)
- (ii) Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $r_1, \dots, r_k \in R$ invertierbar. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass das Produkt $r_1 r_2 \cdots r_k$ invertierbar ist mit Inversem $r_k^{-1} \cdots r_2^{-1} r_1^{-1}$.

Aufgabe 7 (freiwillig - 2 Zusatzpunkte)

Sei V ein 3-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}/2$. Bestimmen Sie die Mächtigkeit von $\text{Hom}(V, V)$. (*Das mag sich erst einmal schwierig anhören. Aber wenn Sie herausfinden, welches Resultat der Vorlesung Ihnen hier helfen kann, können Sie die Antwort ziemlich einfach finden.*)

Zusatzaufgabe

Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgaben wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung präsentieren.

Aufgabe 8

Sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und V ein n -dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Z}/p$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Automorphismen von V gleich

$$(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \cdots (p^n - p^{n-1})$$

ist.