

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der dreizehnten Übung. Der späteste Abgabetermin ist der 27.01 um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem dreizehnten Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 13* finden.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

mit Einträgen aus $\mathbb{Z}/7$. Nutzen Sie das Gauß-Jacobi-Verfahren, um zu zeigen, dass A invertierbar ist und um A^{-1} zu berechnen. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis für A^{-1} .

Aufgabe 3

Sei V ein 4-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}/7$ und sei $\mathcal{B}_V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis von V . Wir definieren eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ durch

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &:= v_1 + 2v_3 + 6v_4, \\ \varphi(v_2) &:= 4v_1 + 4v_2 + 6v_3 + 2v_4, \\ \varphi(v_3) &:= 2v_1 + 4v_2 + 6v_3 + 6v_4, \\ \varphi(v_4) &:= 2v_3. \end{aligned}$$

Überprüfen Sie, ob φ ein Automorphismus ist. Wenn ja, geben Sie φ^{-1} an.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{E}_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und sei

$$\mathcal{B}_3 := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Nach Aufgabe 3 (i) auf Blatt 12 ist $\mathcal{B}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Weiterhin sei $\mathcal{E}_2$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und

$$\mathcal{B}_2 := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Es lässt sich zeigen, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Sie dürfen dies ohne Beweis verwenden.

Schließlich sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}.$$

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass φ linear ist.

- (i) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_3)$, $\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_3)$, $\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{E}_2, \mathcal{B}_2)$ und $\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_2, \mathcal{E}_2)$.
- (ii) Bestimmen Sie $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2)$. Nutzen Sie dies zusammen mit Ihren Ergebnissen aus (i), um auch $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_2)$, $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_2)$ und $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2)$ zu bestimmen.
- (iii) Sei

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie eines Ihrer Ergebnisse aus (ii), um $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(v) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu finden (*Hinweis: Verwenden Sie Bemerkung 7.3.*).

Aufgabe 5

Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sei V ein Vektorraum über K mit Basis $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$. Für alle $1 \leq i, j \leq n$ sei ein $a_{ij} \in K$ gegeben. Für $1 \leq j \leq n$ definieren wir

$$w_j := \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $(w_1, \dots, w_n)$ ist eine Basis von V .
- (ii) Die Matrix $A := (a_{ij})$ ist invertierbar.

Hinweis: Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Was hat diese Abbildung mit A zu tun?

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 03.02.2022, 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}/5$ und sei $\mathcal{B}_V = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V . Wir definieren eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ durch

$$\begin{aligned}\varphi(v_1) &:= v_1 + 3v_3, \\ \varphi(v_2) &:= 2v_1 + v_2 + v_3, \\ \varphi(v_3) &:= 4v_1 + v_2.\end{aligned}$$

- (i) Bestimmen Sie $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)$.
- (ii) Prüfen Sie, ob $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)$ invertierbar ist und geben Sie ggf. $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)^{-1}$ an.
- (iii) Ist φ ein Automorphismus von V ? Wenn ja, geben Sie φ^{-1} an.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{E}_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und sei

$$\mathcal{B}_3 := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathcal{B}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Sei weiterhin

$$\mathcal{E}_4 := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\mathcal{B}_4 := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Nach Aufgabe 5 (i) auf Blatt 1 ist $\mathcal{E}_4$ eine Basis von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass auch $\mathcal{B}_4$ eine Basis von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ist.

Schließlich sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + z & y \\ x + y & 4y - 3z \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass φ linear ist.

- (i) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_3)$, $\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_3)$, $\text{Mat}(\text{id}_{\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}, \mathcal{E}_4, \mathcal{B}_4)$ und $\text{Mat}(\text{id}_{\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}, \mathcal{B}_4, \mathcal{E}_4)$.
- (ii) Berechnen Sie $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4)$. Nutzen Sie dies zusammen mit Ihren Ergebnissen aus (i), um auch $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_4)$, $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_4)$ und $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4)$ zu bestimmen.
- (iii) Sei

$$v := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie eines Ihrer Ergebnisse aus (ii), um $\varphi(v)$ als eine Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{B}_4$ zu schreiben (*Hinweis: Nutzen Sie Bemerkung 7.3.*).

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei V ein zweidimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und sei $\mathcal{B}_V = (v_1, v_2)$ eine Basis von V . Sei $\varphi : V \rightarrow V$ linear und $A := \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)$. Es gelte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bestimmen Sie $\varphi(v_1 + v_2)$.
- (ii) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}'_V$ von V , so dass

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}'_V) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Wenn Sie Kapitel 7 aufmerksam gelesen haben und insbesondere die Abschnitten 7.1 und 7.4 gut verstanden haben, kriegen Sie das hin!

Zusatzaufgabe

Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgabe wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung präsentieren.

Aufgabe 9

Zum Verschlüsseln einer Nachricht kann man folgendes Verfahren verwenden. Den 26 Buchstaben des Alphabets werden Zahlen von 0 bis 25 zugeordnet:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
19	2	21	0	4	7	6	9	17	24	11	15	14

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	12	16	18	1	25	20	3	22	5	8	23	10

Der Klartext (z. B. ALGEBRA) wird in Blöcke zu je zwei Buchstaben unterteilt, wobei man nach Bedarf eventuell noch einen Buchstaben (etwa X) hinzufügt: Al GE BR AX. Jedem Buchstabenpaar entspricht nach der obigen Tabelle ein gewisses Zahlenpaar (a_1, a_2) , dem man mittels

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

ein anderes Paar (b_1, b_2) zuordnen kann, wobei wir alle oben vorkommenden Matrixeinträge als Elemente des Rings $\mathbb{Z}/26$ auffassen. Auf diese Weise lässt sich ALGEBRA zu SFDOLMBH codieren.

- (i) Decodieren Sie SIVNXBMHNOTE.
- (ii) Geben Sie eine Bedingung an die Matrix $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}/26)$ an, damit jede durch

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

codierte Nachricht entschlüsselt werden kann.