

*Hinweis: Auf diesem Blatt gibt es nur Hausaufgaben zur Vorbereitung, die ausnahmsweise bis Freitag abgegeben werden können. Die dabei erreichbaren Punkte sind Zusatzpunkte. Für die Klausurzulassung sind also nur 50 Prozent der bis zu Blatt 13 erreichbaren Punkte erforderlich. In Ihre Punktzahl fließen aber auch die Zusatzpunkte mit ein!*

## Hausaufgaben zur Vorbereitung

*Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der vierzehnten Präsenzübung. Der späteste Abgabetermin ist der 4. Februar um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem vierzehnten Übungstermin!*

### Aufgabe 1 (15 Zusatzpunkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 14* finden.

## Präsenzaufgaben

*Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.*

### Aufgabe 2

Gegeben sei die Matrix  $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  über  $\mathbb{Z}/5$ .

- (a) Bestimmen Sie den Rang von  $A$  und die Dimension des Spaltenraums von  $A$ .
- (b) Geben Sie die Dimension und eine Basis des Nullraums von  $A$  an.
- (c) Vollziehen Sie den Dimensionssatz am Beispiel von  $A$  nach.
- (d) Wie viele Elemente hat  $N(A)$ ? Geben Sie alle Elemente an.

### Aufgabe 3

Definiere die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ z + 2y \end{pmatrix}.$$

Sei  $\mathcal{B}_V := \{e_1, e_2, e_3\}$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$  und seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und  $\mathcal{B}'_V := \{v_1, v_2, v_3\}$ . Seien auch  $A := \text{Mat}(f; \mathcal{B}_V)$  und  $B := \text{Mat}(f, \mathcal{B}'_V)$ .

- (a) Berechnen Sie  $A$ ,  $B$ ,  $\text{Rank}(A)$  und  $\text{Rank}(B)$ .
- (b) Finden Sie eine invertierbare Matrix  $S$  mit  $S^{-1}AS = B$ . Geben Sie  $S^{-1}$  an, aber benutzen Sie dabei nur Ihr Wissen aus Abschnitt 7.4 und nicht etwa die Gauß-Jacobi-Methode.
- (c) Berechnen Sie  $\det(A)$  und  $\det(B)$ . Was ist die Beziehung zwischen den Determinanten? Erklären Sie, warum das passiert.

*Hinweis: Die nächsten beiden Aufgaben sind eher optional. Wenn sie in Ihrer Übung nicht besprochen werden können, wäre es (unter anderem auch zur Vorbereitung auf das Sommersemester) eine schöne Übung für Sie, sie im Selbststudium zu erledigen.*

### Aufgabe 4

Berechnen Sie die Determinante von

$$A := (a_{ij}) := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

nur mit der Definition. Sie können wie folgt vorgehen:

- (a) Listen Sie alle Elemente der symmetrischen Gruppe  $S_4$  auf.
- (b) Finden Sie die Paare  $(i, j)$  mit  $a_{ij} = 0$ . Kreuzen Sie die Elemente  $\sigma \in S_4$  aus der Liste, die Sie in (a) aufgeschrieben haben, wenn  $i \in \{1, \dots, 4\}$  mit  $a_{\sigma(i)i} = 0$  existiert.
- (c) Benutzen Sie die verbleibende Elemente der Liste, um  $\det(A)$  nur mit der Definition der Determinante zu berechnen.

## Aufgabe 5

- (a) Man betrachte die folgenden Produkte von Transpositionen in der symmetrischen Gruppe  $S_n$ :

$$\sigma = (12)(24)(14)(45)(26)(34)(16), \quad \pi = (24)(15)(34)(56).$$

Man schreibe  $\sigma, \pi, \pi^{-1}\sigma\pi, \pi\sigma, \pi^8$  als Produkt paarweise elementfremder Zyklen.

- (b) Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  und seien  $t, u \in S_n$  Transpositionen. Man zeige:  $tu = ut$  oder  $tut = utu$ .

## Zusatzaufgabe

*Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgabe wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung zu präsentieren.*

## Aufgabe 6

Seien  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper  $K$  und  $V^*$  der Dualraum, wie auf Blatt 11 in Aufgabe 10 definiert. Sei  $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$  und  $\mathcal{B}^*$  die Dualbasis von  $\mathcal{B}$ , d.h.  $\mathcal{B}^* = \{\eta_i \in V^* \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ , wobei

$$\eta_i : V \longrightarrow K, \quad v_j \mapsto \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Für  $f \in \text{Hom}(V, V)$  definiert man

$$f^* : V^* \longrightarrow V^*, \quad \alpha \mapsto f^*(\alpha)$$

durch  $f^*(\alpha) : V \longrightarrow K, \quad v \mapsto \alpha(f(v))$ .

- (a) Beweisen Sie, dass  $f^* \in \text{Hom}(V^*, V^*)$  gilt.
- (b) Seien  $A := \text{Mat}(f; \mathcal{B})$  und  $A^* := \text{Mat}(f^*, \mathcal{B}^*)$ . Was ist die Beziehung zwischen  $A$  und  $A^*$ ?
- (c) Zeigen Sie, dass die Abbildung  $*$  :  $\text{Hom}(V, V) \longrightarrow \text{Hom}(V^*, V^*)$ ,  $f \mapsto f^*$  ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen ist.
- (d) Auf Blatt 11 in Aufgabe 10 ist zu beweisen, dass  $V \cong V^*$  gilt. Solch ein Isomorphismus hängt von der Auswahl einer Basis von  $V$  ab. Sei  $V^{**}$  der Dualraum von  $V^*$ . Gibt es einen kanonischen Isomorphismus zwischen  $V$  und  $V^{**}$ , d.h. einen Isomorphismus, der nicht von der Auswahl einer Basis abhängt?