

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der zweiten Präsenzübung. Der späteste Abgabetermin ist der 27.10.2021 um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem zweiten Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 2* finden.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Geben Sie mit kurzer Begründung an, welche der folgenden Vorschriften eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{N}$ definieren.

- (i) $x \sim y \Leftrightarrow x, y$ gerade.
- (ii) $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ gerade.
- (iii) $x \sim y \Leftrightarrow x + y$ gerade.
- (iv) $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ ungerade.
- (v) $x \sim y \Leftrightarrow x + y$ ungerade.

Aufgabe 3

Sei M die Menge der Studierenden an der TU Dresden. Geben Sie Beispiele für Relationen auf M an, die

- (1) reflexiv, symmetrisch und transitiv,
- (2) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv,
- (3) symmetrisch, transitiv, aber nicht reflexiv,

- (4) reflexiv, transitiv, aber nicht symmetrisch,
(5) weder reflexiv, noch symmetrisch, noch transitiv
sind.

Aufgabe 4

Beweisen Sie Lemma 1.4 aus der Vorlesung: Die Relation

$$R := \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}, \text{ so dass } n \mid m\}$$

ist eine reflexive und transitive Relation auf $\mathbb{Z}$. Weiter ist

$$R_0 := \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}_0, \text{ so dass } n \mid m\}$$

eine Ordnung auf $\mathbb{N}_0$.

Aufgabe 5

Seien R und S Äquivalenzrelationen auf einer Menge M .

- (i) Zeigen Sie, dass $R \cap S$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.
- (ii) Beschreiben Sie anhand eines geeigneten Beispiels, wie sich die Äquivalenzklassen von R bzw. S durch die Durchschnittsbildung verfeinern.
- (iii) Ist $R \cup S$ auch eine Äquivalenzrelation auf M ? Wenn ja, beweisen sie es. Wenn nein, geben sie ein Gegenbeispiel an.

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 03.11.2021, 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Untersuchen Sie jeweils, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist. Falls dies der Fall ist, geben Sie die Äquivalenzklassen von $\sim$ auf M an.

- (i) M sei die Menge aller deutschen Städte; für $x, y \in M$ gilt $x \sim y$ genau dann, wenn x und y im selben Bundesland liegen.

- (ii) M sei die Menge aller deutschen Städte; für $x, y \in M$ gilt $x \sim y$ genau dann, wenn x oder y in Sachsen liegt.
- (iii) $M = \mathbb{Z}$, für $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $xy > 0$.
- (iv) $M = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; für $x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $xy > 0$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 1.8 aus der Vorlesung: Sei $\mathcal{P}$ eine Partition auf M . Sei

$$R := \{(x, y) \mid \text{Es gibt ein } N \in \mathcal{P}, \text{ so dass } x, y \in N\}.$$

Dann ist R eine Äquivalenzrelation auf M und die Menge der Äquivalenzklassen von R ist $\mathcal{P}$.

Zusatzaufgabe

Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgabe wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben und eine Rückmeldung zu dieser möchten, können Sie Ihre Lösung zusammen mit Ihren Hausaufgaben in Opal hochladen oder in Ihrer Präsenzübung präsentieren.

Aufgabe 8

Sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine $(n+1)$ -elementige Teilmenge von $\{1, \dots, 2n\}$. Zeigen Sie, dass $a, b \in M$ existieren, so dass $a \neq b$ und dass a ein Teiler von b ist.