

Bezeichnungen

Sei M eine Menge. Dann ist $\text{Sym}(M) := \{\phi : M \longrightarrow M \mid \phi \text{ ist eine Bijektion}\}$ die *symmetrische Gruppe* auf M . Wenn $M = \{1, 2, \dots, n\}$ ist, schreibt man auch $\text{Sym}(n)$ oder S_n .

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der fünften Präsenzübung. Der späteste Abgabetermin ist der 17.11.2021 um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem fünften Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

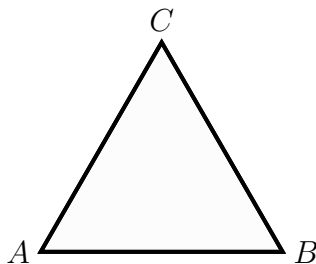
Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 5* finden.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Gegeben ist das folgende gleichseitige Dreieck:



Die Drehung des gegebenen Dreiecks um den Mittelpunkt um 120° (bzw. um 240° , bzw. um 360°) bezeichnen wir mit r_1 (bzw. mit r_2 , bzw. mit id). Es werde dabei gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

Die Spiegelung des gegebenen Dreiecks an der Höhe durch den Eckpunkt A bzw. B bzw. C bezeichnen wir mit s_1 bzw. s_2 bzw. s_3 .

Machen Sie sich klar, dass man alle genannten Spiegelungen und Drehungen als Abbildungen auffassen kann, sodass es Sinn macht, von Kompositionen von Drehungen/Spiegelungen zu sprechen.

Sei $D_6 := \{\text{id}, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass D_6 mit der Komposition von Abbildungen, $\circ$, eine nicht-abelsche Gruppe ist. Stellen Sie die Gruppe $(D_6, \circ)$ mithilfe einer Multiplikationstafel dar.
- (b) Geben Sie das neutrale Element der Gruppe $(D_6, \circ)$ an.
- (c) Geben Sie für jedes Element von D_6 sein Inverses an.
- (d) Zeigen Sie, dass $\{\text{id}, r_1, r_3\}$ eine Untergruppe von D_6 ist.
- (e) Machen Sie sich klar, dass die Elemente von D_6 bereits dadurch festgelegt sind, wie sie die mit 1, 2, 3 bezeichneten Ecken des Dreiecks permutieren. Identifizieren Sie jedes Element von D_6 auf diese Weise mit einem Element von S_3 . Machen Sie sich klar, dass Sie auf diese Weise eine Bijektion von D_6 nach S_3 bekommen.

Aufgabe 3

Sei n eine natürliche Zahl und seien $k, h \in \{1, \dots, n\}$. Definiere

$$G_k := \{\varphi \in \text{Sym}(n) \mid \varphi(k) = k\} \quad \text{und} \quad G_{k,h} := \{\varphi \in \text{Sym}(n) \mid \varphi(k) = k, \varphi(h) = h\}.$$

Zeigen Sie,

- (a) dass G_k eine Untergruppe von $\text{Sym}(n)$ ist,
- (b) dass $G_{k,h}$ eine Untergruppe von $\text{Sym}(n)$ ist. Wie kann man $G_{k,h}$ durch G_k und G_h beschreiben?

Aufgabe 4

Lemma 2.12 aus der Vorlesung besagt folgendes:

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Die folgenden Regeln gelten für alle $g, h \in G$ und $m, n \in \mathbb{Z}$:

- (a) $(-n)g = -(ng) = n(-g)$.
- (b) $(n + m)g = ng + mg$.
- (c) $n(mg) = (nm)g$.

(d) $m(g + h) = mg + mh$.

Die Teile (a) und (b) wurden bereits in der Vorlesung bewiesen. Beweisen Sie nun (c) und (d).

Aufgabe 5

Sei $K := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(a) Für alle $(a, b), (a', b') \in K$ sei

$$(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b'),$$

$$(a, b) \circ (a', b') := (aa' - bb', ab' + a'b).$$

Man zeige, dass $(K, +, \circ)$ ein Körper ist.

Bemerkung: Man nennt diesen Körper den *Körper der komplexen Zahlen* und bezeichnet ihn mit $\mathbb{C}$. Man schreibt i für das Element $(0, 1)$.

(b) Was ist i^2 ?

(c) Definieren Sie nun

$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa', bb').$$

Beweisen Sie, dass $(K, +, \cdot)$ ein Ring ist. Handelt es sich auch um einen Körper? Und um einen Integritätsring?

(d) Was können Sie über $(K, +, \circ)$ sagen, wenn man den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen durch einen beliebigen Körper oder einen kommutativen Ring ersetzt?

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 24.11.2021, 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Seien X, Y Mengen und $\alpha : X \rightarrow Y$ eine Bijektion. Zeigen Sie:

(a) Für $\pi \in \text{Sym}(X)$ gilt $\hat{\pi} := \alpha \circ \pi \circ \alpha^{-1} \in \text{Sym}(Y)$.

(b) Die Abbildung $\phi : \text{Sym}(X) \rightarrow \text{Sym}(Y), \pi \mapsto \hat{\pi}$ ist eine Bijektion.

(c) Für $\pi_1, \pi_2 \in \text{Sym}(X)$ gilt

$$\phi(\pi_1 \circ \pi_2) = \phi(\pi_1) \circ \phi(\pi_2).$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Prüfen Sie, ob es sich um einen Körper handelt:

$$(\mathbb{Z}, \oplus, \odot) \quad \text{mit} \quad a \oplus b := a + b - 1, \quad a \odot b := a + b - ab.$$

Zusatzaufgabe

Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgabe wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese (oder Teile davon) in Ihrer Präsenzübung zu präsentieren.

Aufgabe 8

Eine Gruppe G heißt *zyklisch* genau dann, wenn ein Element $x \in G$ existiert, so dass alle Elemente $g \in G$ eine Potenz von x sind, d.h. für jedes $g \in G$ existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $g = x^n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) $(\mathbb{Z}, +)$ ist zyklisch.
- (b) Die triviale Untergruppe $\{0\}$ ist die eindeutige endliche Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
- (c) Für jede Untergruppe $\{0\} \neq M \subseteq \mathbb{Z}$ existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass $M = n\mathbb{Z}$ ist ($n\mathbb{Z}$ ist die Menge aller durch n teilbaren ganzen Zahlen). Insbesondere existiert eine Bijektion zwischen M und $\mathbb{Z}$.
- (d) Alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind zyklisch.
- (e) Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring (mit multiplikativem neutralen Element 1_R) und $S \subseteq R$ eine Teilmenge von R . S heißt *Unterring* von R falls
 1. $1_R \in S$;
 2. $(S, +)$ ist eine Untergruppe von $(R, +)$;
 3. Für alle $a, b \in S$ gilt $a \cdot b \in S$.

Sei K ein Körper, so dass $\mathbb{Z}$ ein Unterring von K ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \subseteq K$ gilt. Damit ist $\mathbb{Q}$ der "kleinste" Körper, der $\mathbb{Z}$ als Unterring enthält.