

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der sechsten Übung. Der späteste Abgabetermin ist der 24.11.2021 um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem sechsten Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 6* finden.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Stellen Sie die Additions- und Multiplikationstafel für $\mathbb{Z}/6$ auf. Geben Sie alle invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}/6$ und deren Inverse an.

Aufgabe 3

Geben Sie die folgenden Brüche in $\mathbb{Z}/5$ in der Form $[i]$ mit $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ an:

$$\frac{[1]}{[2]}, \frac{[2]}{[3]}, \frac{[3]}{[4]}, \frac{[3] + [4]}{[2]}.$$

Aufgabe 4

Beweisen Sie Lemma 2.25 (b), (c), (d): Sei K ein Körper und seien $a, b, c, d \in K$ mit $b \neq 0 \neq d$. Dann gilt:

- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}$ und $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$.
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
- Falls $c \neq 0_K$, dann gilt $\frac{c}{d} \neq 0_K$ und

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Aufgabe 5

- (a) Beweisen Sie das Lemma von Bézout: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann existieren $s, t \in \mathbb{Z}$, so dass $sa + tb = \text{ggT}(a, b)$.
- (b) Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und sei $k \in \mathbb{Z}$, so dass $[k]$ invertierbar in $\mathbb{Z}/n$ ist. Diskutieren Sie, wie das Lemma Bézout helfen könnte, das multiplikative Inverse von $[k]$ in $\mathbb{Z}/n$ zu finden.

Aufgabe 6

Sei K ein Körper und sei n eine natürliche Zahl. Beweisen Sie, dass K^n zusammen mit der in Beispiel 3.2 angegebenen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum ist.

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 1.12.2021, 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

- (a) Seien m und n natürliche Zahlen mit $m > n$. Seien außerdem k und r natürliche Zahlen mit $m = kn + r$ und $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Zeigen Sie, dass $\text{ggT}(m, n) = \text{ggT}(n, r)$.
- (b) Nutzen Sie (a), um $\text{ggT}(1055, 1026)$ zu berechnen. Finden Sie außerdem $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(1055, 1026) = s \cdot 1055 + t \cdot 1026$.
Hinweis: Wenn Sie nicht wissen, in welcher Weise Sie (a) verwenden sollen und wie Sie die Darstellung $\text{ggT}(1055, 1026) = s \cdot 1055 + t \cdot 1026$ finden sollen, so machen Sie sich mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus vertraut.
- (c) Folgern Sie aus (b), dass $[1026]$ in $\mathbb{Z}/1055$ invertierbar ist und bestimmen Sie das multiplikative Inverse von $[1026]$ in $\mathbb{Z}/1055$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

- (i) Beweisen Sie Lemma 2.36 (a): Für jedes $z \in \mathbb{Z}$ und jedes $a \in R$ gilt $za = (z1_R)a$.
- (ii) Beweisen Sie Lemma 2.40: Wenn R endlich ist, so ist $\text{char}(R) \neq 0$. Insbesondere ist die Charakteristik eines endlichen Körpers immer eine Primzahl.

Zusatzaufgabe

Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgabe wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung zu präsentieren.

Aufgabe 9

Gibt es einen Körper mit genau sechs Elementen?