

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der siebten Präsenzübung. Der späteste Abgabetermin ist der 1.12. um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem siebten Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 7* finden.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

In den folgenden beiden Teilaufgaben, also in (a) und (b), geht es um Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ für gegebene natürliche Zahlen n . Dabei ist $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Addition und der üblichen Skalarmultiplikation versehen (siehe Beispiel 3.2 im Skript).

(a) Sei $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \right\}$.

(a1) Wenn $u, v \in V$, ist dann auch $u + v \in V$?

(a2) Wenn $u \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, ist dann auch $\lambda u \in V$?

(a3) Ist V ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$?

(b) Sind die folgenden Teilmengen Unterräume?

(b1) $S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b2) $S_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b3) $S_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y + z \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

$$(b4) \ S_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid |x + y| = |z| \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

$$(b5) \ S_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z + w = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

(c) Entscheiden Sie, ob $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Addition und der jeweils angegebenen Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

$$(c1) \text{ Für } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ sei } \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(c2) \text{ Für } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ sei } \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda^5 x \\ \lambda^5 y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Sei K ein Körper.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V := K^n$. Wir betrachten V als Vektorraum über K mit der üblichen Addition und der üblichen Skalarmultiplikation (vgl. Beispiel 3.2 im Skript). Für $1 \leq i \leq n$ sei

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n,$$

wobei der i -te Eintrag gleich 1 sei. Beschreiben Sie die Unterräume $V_m := \langle e_1, e_2, \dots, e_m \rangle$ für alle $m \in \{1, \dots, n\}$.

(b) Sei nun V ein beliebiger Vektorraum über K und $v_1, v_2, v_3 \in V$, so dass $v_2, v_3 \notin \langle v_1 \rangle$ und $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$. Zeigen Sie, dass $v_2 \notin \langle v_1, v_3 \rangle$. Folgern Sie, dass $\langle v_1, v_2 \rangle \neq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ und $\langle v_1, v_3 \rangle \neq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Aufgabe 4

Sei $V := \mathbb{R}^4$. Wir betrachten V als Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und der üblichen Skalarmultiplikation (vgl. Beispiel 3.2 im Skript). Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 die in Aufgabe 3 (b) angenommenen (und damit auch die daraus abgeleiteten) Eigenschaften haben.
- (b) Zeigen Sie, dass $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \neq V$.

Aufgabe 5 (optional)

Diese Aufgabe wird in den Übungen nur besprochen, wenn es die Zeit erlaubt. Sollte diese Aufgabe nicht in Ihrer Übung besprochen werden, so ist es eine gute Übung für Sie, sie eigenständig zu bearbeiten.

Sei K ein Körper und sei V ein Vektorraum über K . Sind U und W Unterräume von V , so schreiben wir $V = U \oplus W$, wenn $V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$.

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und der üblichen Skalarmultiplikation. Seien

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \right\} \quad \text{und} \quad W := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeigen Sie,

- (a) dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist,
- (b) dass $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ gilt.

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 8.12., 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Sei G eine Gruppe und seien A und B Untergruppen von G . Zeigen Sie:

- (a) $A \cap B$ ist eine Untergruppe von G ;
- (b) $A \cup B$ ist eine Untergruppe von G genau dann, wenn $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$ ist.
- (c) Zeigen Sie, dass (b) auch für Unterräume von Vektorräumen gilt. Zeigen Sie also folgendes: Sind V ein Vektorraum über einem Körper K und sind U und W Unterräume von V , so ist $U \cup W$ genau dann ein Unterraum von V , wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

Bemerkung: Nach Lemma 3.18 im Skript gilt auch (a) für Unterräume von Vektorräumen statt Untergruppen von Gruppen.

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Seien X eine nichtleere Menge und $V := \text{Abb}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$. Definiere

$$\begin{aligned} + : \quad V \times V &\longrightarrow V \\ (f, g) &\longmapsto f + g : X \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, g) &\longmapsto \lambda \cdot g : X \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit $(\lambda \cdot g)(x) := \lambda g(x)$.

- (a) Zeigen Sie, dass V mit den Operationen $+$ und $\cdot$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.
- (b) Sei $U := \{f \in V \mid |f(X)| \text{ ist endlich.}\}$. Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von V ist.

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben stellen eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgaben werden nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung zu präsentieren.

Aufgabe 8

Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition $+\mathbb{R}^2$ und der üblichen Skalarmultiplikation $\cdot\mathbb{R}^2$. Sei $M := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Wir können ein Element (P, Q) von M als einen Pfeil auffassen, der im Punkt P beginnt und im Punkt Q endet.

Für alle $P = (x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir die Abbildung

$$t_P : M \longrightarrow M$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \left(\begin{pmatrix} x_1 + x_P \\ y_1 + y_P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 + x_P \\ y_2 + y_P \end{pmatrix} \right).$$

Sei $\sim \subseteq M \times M$ die Relation definiert durch

$$(A, B) \sim (C, D) \iff \exists P \in \mathbb{R}^2 \text{ sodass } t_P((A, B)) = (C, D).$$

- (a) Prüfen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Sei $V := M / \sim$ die Menge der Äquivalenzklassen.
- (b) Definiere $+: V \times V \longrightarrow V$ und $\cdot: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ durch

$$[(A, B)] + [(C, D)] := [(A + \mathbb{R}^2 C, B + \mathbb{R}^2 D)] \quad \text{und} \quad \lambda \cdot [(A, B)] := [\lambda \cdot \mathbb{R}^2 (A, B)].$$

Zeigen Sie, dass $+$ und $\cdot$ wohldefiniert sind und dass V mit den Operationen $+$ und $\cdot$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

- (c) Zeigen Sie, dass jede Klasse $[(A, B)]$ einen Repräsentanten (O, C) mit $O = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ hat.

Aufgabe 9

Seien A, B, C Unterräume eines Vektorraums V über einem Körper K und sei $V := A \cup B \cup C$.

- (a) Zeigen Sie, dass $|K| = 2$ ist oder ein $X \in \{A, B, C\}$ mit $V = X$ existiert.

Tipp:

Nehmen Sie $|K| > 2$ an. Machen Sie sich klar, dass Elemente $k, h \in K$ mit $k, h \neq 0$ und $k - h = 1$ existieren.

Wenn $u \in A \setminus (A \cap B)$ und $w \in B \setminus (A \cap B)$, was können Sie über $ku + w$, $hu + w$ und u sagen?

- (b) Geben Sie ein Beispiel an, in dem $A, B, C \neq V$ und $V = A \cup B \cup C$ gelten.
- (c) Was kann man sagen, wenn V eine Gruppe und A, B, C Untergruppen sind?