

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der achten Übung. Der späteste Abgabetermin ist der 8.12. um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem achten Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 8* finden.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

(a) Prüfen Sie, ob die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig im $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sind.

(b) Bestimmen Sie, für welche $b, c \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig im $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^2$ sind.

(c) Finden Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, so dass

$$\langle v \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y = 0, z - x = 0 \right\}.$$

Folgern Sie, dass die obige Menge ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist und finden Sie eine Basis dieses Unterraums. Geben Sie seine Dimension an.

Aufgabe 3

Wir erinnern uns daran, dass $\mathbb{Z}/p$ für jede Primzahl p ein Körper ist. In dieser Aufgabe betrachten wir Vektorräume über $\mathbb{Z}/p$ für gegebene Primzahlen p . Im Folgenden schreiben wir $0, 1, \dots, p-1$ für die korrespondierenden Elemente von $\mathbb{Z}/p$, d.h. für $0 \leq k \leq p-1$ schreiben wir k anstelle von $[k]$.

(a) Gegeben seien die folgenden Vektoren in $(\mathbb{Z}/5)^3$:

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sind a, b, c linear unabhängig? Ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in $\langle a, b, c \rangle$ enthalten?

(b) Geben Sie alle Elemente des Vektorraums $(\mathbb{Z}/2)^3$ an. Visualisieren Sie den Vektorraum durch einen Würfel.

(c) Gegeben seien die folgenden Vektoren in $(\mathbb{Z}/2)^3$:

$$v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Vektoren aus $\langle v, w \rangle$ an. Welche Dimension hat der Vektorraum $\langle v, w \rangle$?

Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist. Beweisen Sie die wahren Aussagen und verwenden Sie dabei nur die Definitionen der in der jeweiligen Aussage auftauchenden Begriffe. Widerlegen Sie die falschen Aussagen durch ein Gegenbeispiel.

- (a) Sei $n \geq 2$. Dann sind $v_1, \dots, v_n \in V$ genau dann linear abhängig, wenn mindestens ein Vektor v_i Linearkombination der anderen ist.
- (b) Ist $U \subseteq W \subseteq V$ und ist U linear abhängig, so ist auch W linear abhängig.
- (c) Ist $U \subseteq W \subseteq V$ und ist W linear abhängig, so ist auch U linear abhängig.
- (d) Sind $v, w \in V$ linear unabhängig, so sind $v - w$ und $v + w$ ebenfalls linear unabhängig.

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 15.12., 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 - 3x_2 = 0, x_3 - 2x_4 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

- (a) Finden Sie Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ mit $\langle v_1, v_2 \rangle = W$.
- (b) Ist W ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$? Falls ja, bestimmen Sie eine Basis von W und geben Sie die Dimension von W an.

Aufgabe 6 (1 Punkt)

Geben Sie einen Körper K an, so dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1_K \\ 1_K \\ 0_K \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1_K \\ 0_K \\ 1_K \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0_K \\ 1_K \\ 1_K \end{pmatrix}$$

linear abhängig in K^3 sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Seien X eine nichtleere Menge und sei K ein Körper. Sei $V := \text{Abb}(X, K) = \{f : X \rightarrow K\}$. Definiere

$$\begin{aligned} + : \quad V \times V &\longrightarrow V \\ (f, g) &\longmapsto f + g : X \longrightarrow K \end{aligned}$$

mit $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und

$$\begin{aligned} \cdot : \quad K \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, g) &\longmapsto \lambda \cdot g : X \longrightarrow K \end{aligned}$$

mit $(\lambda \cdot g)(x) := \lambda g(x)$.

Analog zu Aufgabe 7 (a) auf Übungsblatt 7 lässt sich zeigen, dass V mit den Operationen $+$ und $\cdot$ ein Vektorraum über K ist. Dies dürfen Sie im Folgenden ohne Beweis verwenden.

Für $a \in X$ sei

$$\delta_a : X \rightarrow K, x \mapsto \delta_{ax} := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = a \\ 0 & \text{falls } x \neq a. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie: Sind $a_1, \dots, a_n \in X$ paarweise verschieden, so sind $\delta_{a_1}, \dots, \delta_{a_n} \in V$ linear unabhängig.
- (b) Folgern Sie aus (a), dass die Menge $\{\delta_a \mid a \in X\}$ linear unabhängig ist.
- (c) Folgern Sie aus (b), dass V nicht endlich-dimensional ist, wenn X unendlich ist.
- (d) Sei nun angenommen, dass X endlich ist und sei $U := \{\delta_a \mid a \in X\}$. Zeigen Sie, dass $V = \langle U \rangle$. Begründen Sie, dass U eine Basis von V ist und geben Sie die Dimension von V an.

Zusatzaufgaben

Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgabe wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung zu präsentieren.

Aufgabe 8

Sei X eine beliebige Menge. Es sei $V := \mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X , also die Menge aller Teilmengen von X . Für $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ sei

$$Y + Z := (Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z).$$

Wir definieren eine Skalarmultiplikation

$$\mathbb{Z}/2 \times V \rightarrow V$$

durch

$$\begin{aligned} [1] \cdot Y &:= Y \\ [0] \cdot Y &:= \emptyset \end{aligned}$$

für alle $Y \in V = \mathcal{P}(X)$.

- (a) Zeigen Sie, dass V zusammen mit $+$ und $\cdot$ ein Vektorraum über $\mathbb{Z}/2$ ist.
- (b) Sei nun angenommen, dass X nichtleer und endlich ist. Sei W die Menge aller Teilmengen von X , die eine gerade Mächtigkeit haben. Zeigen Sie, dass W ein Unterraum von V ist.
- (c) Sei weiterhin angenommen, dass X nichtleer und endlich ist. Sei Y eine Teilmenge von X mit ungerader Mächtigkeit. Zeigen Sie, dass W zusammen mit Y ganz V erzeugt.