

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der neunten Präsenzübung. Der späteste Abgabetermin ist der 15.12. um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem neunten Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 9* finden.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Seien

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 5z = 0 \right\}$$

und

$$U := \langle e_1, e_2 \rangle \quad \text{mit } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Finden Sie Vektoren $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Folgern Sie, dass W ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie eine Basis von W und geben Sie $\dim_{\mathbb{R}}(W)$ an.
- (b) Geben Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ an.
- (c) Beschreiben Sie $W \cap U$. Bestimmen Sie eine Basis von $W \cap U$ und geben Sie $\dim_{\mathbb{R}}(W \cap U)$ an.
- (d) Beweisen Sie mithilfe der Dimensionformel (Lemma 3.60), dass $W + U = \mathbb{R}^3$ gilt.

Aufgabe 3

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $n := \dim_K(V)$.

- (a) Beweisen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ ein Unterraum U_k von V mit $\dim_K(U_k) = k$ existiert.
- (b) Geben Sie alle Unterräume von $(\mathbb{F}_2)^3$, wobei $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2$ sei, nach der Dimension geordnet an.

Aufgabe 4

Seien V ein Vektorraum über einem Körper K und seien v_i , $i \in I$, Elemente aus V (für eine Indexmenge I). Sei

$$\phi : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \mathcal{P}(V), J \mapsto \langle v_j \mid j \in J \rangle.$$

- (a) Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
 - (i) Die Vektoren v_i für $i \in I$ sind linear unabhängig.
 - (ii) ϕ ist injektiv.
- (b) Seien $\mathcal{U}(V) := \{U \subseteq V \mid U \text{ ist ein Unterraum von } V\}$ und $\psi : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \mathcal{U}(V)$, $\psi(J) := \phi(J)$. Beschreiben Sie die Beziehung zwischen ϕ und ψ . Wenn ϕ oder ψ injektiv (bzw. surjektiv) ist, was können wir über die jeweils andere Abbildung hinsichtlich Injektivität (bzw. Surjektivität) sagen?
- (c) Wenn V unendlich-dimensional ist, dann schreiben wir $\dim_K(V) = \infty$. Sei

$$f : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}, f(J) = \dim_K(\phi(J)).$$

Zeigen Sie: Wenn f surjektiv ist, dann ist V unendlich-dimensional. Zeigen Sie, dass die Umkehrung im Allgemeinen falsch ist. Wenn V unendlich-dimensional ist, können Sie eine Bedingung an die Vektoren v_i , $i \in I$, stellen, unter der die Abbildung f surjektiv ist?

Aufgabe 5

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem über dem Körper K , indem Sie die folgenden Schritte ausführen:

- Bilden Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems und bringen Sie diese durch elementare Zeilenumformungen in reduzierte Stufenform.
- Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

(a) $K = \mathbb{Q}$.

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$$

$$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$$

$$5x_1 - 11x_2 + 9x_3 = 0$$

(b) $K = \mathbb{R}$.

$$x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0$$

$$3x_1 - (\sqrt{2} + 6)x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 = -1$$

(c) $K = \mathbb{Z}/11$.

$$x_1 + 3x_2 + 7x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + 6x_2 + x_3 = 0$$

$$9x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1$$

$$8x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 2$$

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 22.12., 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem indem Sie die folgenden Schritte ausführen:

- Bilden Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems und bringen Sie diese durch elementare Zeilenumformungen in reduzierte Stufenform.
- Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Seien $L_{\mathbb{Q}}$ die Lösungsmenge über $\mathbb{Q}$ und $L_{\mathbb{R}}$ die Lösungsmenge über $\mathbb{R}$. Was ist die Beziehung zwischen $L_{\mathbb{Q}}$ und $L_{\mathbb{R}}$? Geben Sie auch $L_{\mathbb{Z}/19}$, also die Lösungsmenge über $\mathbb{Z}/19$, an.

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 13x_4 = 4$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K .

- (a) Seien U und W Unterräume von V mit $U \cap W = \{0_V\}$. Zeigen Sie: Wenn B_U eine Basis von U und B_W eine Basis von W ist, dann ist $B_U \cup B_W$ eine Basis von $U + W$.

Sei von nun an angenommen, dass V endlich-dimensional ist. Ein Unterraum H von V heißt *Hyperebene* von V , falls $\dim_K(H) = \dim_K(V) - 1$ ist. Man zeige:

- (b) Sind H eine Hyperebene von V und U ein Unterraum von V mit $U \not\subseteq H$, so ist $\dim_K(U \cap H) = \dim_K(U) - 1$.
- (c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Hyperebenen $H_1, \dots, H_n$ von V gilt:

$$\dim_K \left(\bigcap_{i=1}^n H_i \right) \geq \dim_K(V) - n.$$

Zusatzaufgabe

Die folgenden Aufgaben stellen eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgaben werden nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung zu präsentieren.

Aufgabe 8

Wir betrachten den Vektorraum aus Aufgabe 8 von Übungsblatt 8 und verwenden die in dieser Aufgabe eingeführte Notation.

- (a) Zeigen Sie, dass W eine Hyperebene von V ist.
- (b) Nutzen Sie (a), um einen neuen Beweis der Aussage aus Aufgabe 7 von Übungsblatt 4 anzugeben.

Aufgabe 9

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Sei $e := \sum_{i=1}^n v_i$ und $u_j = e - v_j$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Man zeige: $\{u_j \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$ ist genau dann Basis von V , wenn $n - 1$ nicht von $\text{char}(K)$ geteilt wird.