

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der vierten Präsenzübung. Der späteste Abgabetermin ist der 10.11.2021 um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem vierten Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner Hausaufgaben unter der Überschrift Vorbereitungsaufgaben für Übung 4 finden.

Es gibt zwei Vorbereitungsaufgaben für Übung 4. Die erste davon lautet wie folgt:

Für jede natürliche Zahl n sei $P(n)$ die folgende Aussage:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2.$$

Wir wollen durch vollständige Induktion beweisen, dass $P(n)$ für jede natürliche Zahl n erfüllt ist. Unten ist ein Beweis dieser Aussage gegeben, allerdings nicht in der richtigen Reihenfolge. Verändern Sie die Reihenfolge so, dass man den Beweis von oben nach unten in der richtigen Reihenfolge lesen kann.

(a) Wir wollen zeigen, dass auch $P(n + 1)$ gilt.

(b) Sei ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so dass $P(n)$ gilt.

(c) $= n^2 + 2(n + 1) - 1 = n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$

(d) Es gilt

$$\sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 1 = 1^2.$$

(e) Wir müssen also zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = (n + 1)^2.$$

(f) Damit gilt $P(1)$.

(g) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = \left(\sum_{k=1}^n (2k - 1) \right) + 2(n + 1) - 1$$

Bevor wir uns über die richtige Reihenfolge Gedanken machen, rufen wir uns das Prinzip der vollständigen Induktion in Erinnerung. In der Vorlesung wurden zwei Versionen des Prinzips der vollständigen Induktion eingeführt. Wir beschränken uns hier auf die erste Version.

Nehmen wir an, es ist r eine ganze Zahl und für jede ganze Zahl $n \geq r$ ist eine Aussage $P(n)$ gegeben. Gemäß dem Prinzip der vollständigen Induktion können wir in zwei Schritten vorgehen, wenn wir beweisen wollen, dass die Aussage $P(n)$ für jede ganze Zahl $n \geq r$ wahr ist:

- Zuerst beweisen wir die Gültigkeit der Aussage $P(r)$. Das wird *Induktionsanfang* genannt.
- Im zweiten Teil des Beweises nehmen wir an, dass eine ganze Zahl $n \geq r$ gegeben ist, für die $P(n)$ wahr ist (dies ist die *Induktionsannahme* oder *Induktionshypothese*). Wir beweisen dann, dass auch $P(n+1)$ wahr ist. Das ist der *Induktionsschritt*.

Der Induktionsanfang sagt uns, dass $P(r)$ wahr ist. Der Induktionsschritt sagt uns, dass wenn unsere Aussage für eine ganze Zahl $n \geq r$ wahr ist, dass sie dann auch für ihren Nachfolger, also für $n+1$, wahr ist. Dass $P(r)$ wahr ist, bedeutet also dem Induktionsschritt zufolge, dass auch $P(r+1)$ wahr ist. Und dass $P(r+1)$ wahr ist, bedeutet nach dem Induktionsschritt wiederum, dass auch $P(r+2)$ wahr ist. Dies impliziert wiederum, dass $P(r+3)$ wahr ist. Und so geht es immer weiter. Bis ins Unendliche. Damit ist $P(n)$ für alle ganzen Zahlen $n \geq r$ bewiesen.

Kommen wir nun zur eigentlichen Aufgabe. Für jede natürliche Zahl n bezeichnet $P(n)$ also die Aussage

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

Wie im Aufgabentext steht, soll bewiesen werden, dass $P(n)$ für jede natürliche Zahl n richtig ist. Anders ausgedrückt: Wir wollen zeigen, dass $P(n)$ für jede ganze Zahl $n \geq 1$ richtig ist. Was oben als r bezeichnet wurde, ist nun also die 1. Wollen wir unseren Beweis per vollständiger Induktion führen, besteht der erste Schritt also darin, die Gültigkeit der Aussage $P(1)$ zu zeigen (das ist der Induktionsanfang). Am Anfang des Beweises steht also die Rechnung, die in der Aufgabenstellung mit (d) nummeriert wurde. Denn diese verifiziert gerade, dass $P(1)$ gilt. Als nächstes formulieren wir dann kurz, dass $P(1)$ bewiesen und der Induktionsanfang somit abgeschlossen ist. Das geschieht in (f). Nun gehen wir zum Induktionsschritt über. Zunächst formulieren wir die Induktionsannahme, also dass eine natürliche Zahl n betrachtet werden soll, für die $P(n)$ wahr ist. Das geschieht in (b). Die Formulierung in (a) leitet dann den Induktionsschritt ein. Dem Leser/der Leserin wird gesagt, wo die Reise hingehet, nämlich dass aus der Gültigkeit von $P(n)$ nun die Gültigkeit von $P(n+1)$ gefolgert werden soll. Was unter $P(n+1)$ zu verstehen ist, wird dann in (e) ausgedrückt, denn wir müssen das n in $P(n)$ durch $n+1$ ersetzen, um $P(n+1)$ zu erhalten. In (g) wird dann damit

begonnen, die Gültigkeit von $P(n+1)$ zu beweisen. Dabei wird die Summe

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)$$

aufgesplittet in

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) + 2(n+1) - 1.$$

Hier tauchen links die ersten n Summanden auf und dann $2(n+1) - 1$ als der $(n+1)$ -te Summand (diesen erhalten wir, wenn wir $n+1$ für k einsetzen). Warum splitten wir die Summe so auf? Nun ja, wir arbeiten ja unter der Annahme, dass $P(n)$ wahr ist. Und dies bedeutet ja gerade, dass die links stehende Summe gleich n^2 ist. Das erlaubt uns, im nächsten Schritt diese Summe durch n^2 zu ersetzen. Das geschieht in (c), wo dann auch das gewünschte Endergebnis $(n+1)^2$ erhalten wird.

Zusammengefasst lautet die richtige Reihenfolge also wie folgt: (d), (f), (b), (a), (e), (g), (c).

Die zweite Vorbereitungsaufgabe lautet wie folgt:

Für jede natürliche Zahl n sei $P(n)$ die folgende Aussage:

Wenn in einer Gruppe von n Tieren ein Elefant dabei ist, dann sind alle n Tiere Elefanten.

Wir betrachten den folgenden "Beweis".

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$.

"Beweis": 1. Induktionsanfang: Wenn in einer aus nur einem Tier bestehenden Gruppe ein Elefant dabei ist, dann sind alle Tiere in der Gruppe Elefanten. Somit ist $P(1)$ richtig.

2. Induktionsschritt: Es sei ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so dass $P(n)$ gilt. Wir wollen folgern, dass auch $P(n+1)$ gilt. Dazu betrachten wir eine Gruppe von $n+1$ Tieren, bezeichnet mit $T_1, T_2, \dots, T_{n+1}$, wobei eines der Tiere, sagen wir T_2 , ein Elefant sein soll. Die Mengen $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ und $\{T_2, \dots, T_{n+1}\}$ enthalten jeweils den Elefanten T_2 . Nach Induktionsvoraussetzung bestehen beide Mengen also aus lauter Elefanten. Da alle $n+1$ Tiere in einer der Mengen vorkommen, sind also alle $n+1$ Tiere Elefanten. Somit gilt $P(n+1)$.

Wo steckt der Fehler in obigem "Beweis"? Wählen Sie die richtige Antwort aus.

- *Der Induktionsanfang ist fehlerhaft.*
- *Das Prinzip der vollständigen Induktion lässt sich nur anwenden, um Aussagen über ganze Zahlen zu beweisen. Man kann es hier nicht anwenden, da eine Aussage über Elefanten bewiesen werden soll.*

- Die Schlussfolgerungen im Induktionsschritt sind für $n = 1$ fehlerhaft.
- Man kann im Induktionsschritt nicht einfach annehmen, dass T_2 ein Elefant ist.
- Welcher Fehler? Der Beweis hat keinen Fehler.

Richtig ist die dritte Antwort, also dass die Schlussfolgerungen im Induktionsschritt für $n = 1$ fehlerhaft sind. Genauer ist der vierte Satz im Induktionsschritt für $n = 1$ falsch. Der vierte Satz im Induktionsschritt lautet "Die Mengen $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ und $\{T_2, \dots, T_{n+1}\}$ enthalten jeweils den Elefanten T_2 ". Wenn $n = 1$ ist, steht dort also, dass die Mengen $\{T_1\}$ und $\{T_2\}$ jeweils den Elefanten T_2 enthalten. Das stimmt aber nicht, denn die Menge $\{T_1\}$ enthält den Elefanten T_2 nicht!

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

(i) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

für alle natürlichen Zahlen n erfüllt ist.

(ii) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $5^n + 7$ für jede natürliche Zahl n durch 4 teilbar ist. (Hinweis: An einer bestimmten Stelle des Beweises könnte es helfen, 5 als $4 + 1$ zu schreiben.)

(i) Für jede natürliche Zahl n sei $P(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Wir haben zu zeigen, dass $P(n)$ für jede natürliche Zahl n wahr ist.

1. Induktionsanfang: Es gilt

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}.$$

Somit ist $P(1)$ wahr.

2. Induktionsschritt: Sei ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so dass $P(n)$ wahr ist. Wir wollen folgern, dass auch $P(n+1)$ wahr ist. Wir müssen also zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \text{da } P(n) \text{ wahr ist} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} && (n+1 \text{ ausklammern}) \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 3n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)((n+2)2n + (n+2)3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} && (n+2 \text{ ausklammern}). \end{aligned}$$

Damit gilt $P(n+1)$. Der Beweis ist abgeschlossen.

- (ii) Für jede natürliche Zahl n sei $P(n)$ die Aussage "5ⁿ + 7 ist durch 4 teilbar". Wir haben zu zeigen, dass $P(n)$ für jede natürliche Zahl n wahr ist.

1. Induktionsanfang: Es ist $5^1 + 7 = 5 + 7 = 12$ durch 4 teilbar. Damit ist $P(1)$ wahr.

2. Induktionsschritt: Sei ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so dass $P(n)$ wahr ist. Wir wollen folgern, dass auch $P(n+1)$ wahr ist. Wir müssen also zeigen, dass $5^{n+1} + 7$ durch 4 teilbar ist.

Es gilt

$$5^{n+1} + 7 = 5^n \cdot 5 + 7 = 5^n \cdot (4 + 1) + 7 = 5^n \cdot 4 + 5^n + 7.$$

Da $P(n)$ wahr ist, ist $5^n + 7$ durch 4 teilbar. Es gibt also ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $5^n + 7 = 4m$. Es gilt nun

$$5^{n+1} + 7 = 5^n \cdot 4 + 5^n + 7 = 5^n \cdot 4 + 4m = 4 \cdot (5^n + m).$$

Somit ist $5^{n+1} + 7$ durch 4 teilbar. Mit anderen Worten ist $P(n+1)$ erfüllt.

Aufgabe 3

Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Sind n eine natürliche Zahl und M eine n -elementige Menge, so gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

Für jede natürliche Zahl n sei $P(n)$ die Aussage

Ist M eine n -elementige Menge, so gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

Wir haben zu zeigen, dass $P(n)$ für jede natürliche Zahl n richtig ist.

1. Induktionsanfang: Der Induktionsanfang besteht darin, zu zeigen, dass $P(1)$ richtig ist. Wir müssen also zeigen, dass die Aussage

Ist M eine 1-elementige Menge, so gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^1$

richtig ist. Anders ausgedrückt müssen wir zeigen, dass die Potenzmenge einer jeden einelementigen Menge Mächtigkeit 2 hat. Sei dazu M eine einelementige Menge, sagen wir $M = \{x\}$. Dann hat M genau zwei Teilmengen, nämlich die leere Menge $\emptyset$ und die Menge $M = \{x\}$. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist die Menge aller Teilmengen von M , also $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, M\}$. Es gilt also $|\mathcal{P}(M)| = 2$. Folglich ist $P(1)$ wahr.

2. Induktionsschritt: Sei ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so dass $P(n)$ wahr ist. Wir wollen folgern, dass auch $P(n+1)$ wahr ist. Dazu haben wir zu zeigen, dass die Aussage

Ist M eine $(n+1)$ -elementige Menge, so gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{n+1}$

wahr ist. Sei dazu M eine $(n+1)$ -elementige Menge, sagen wir $M = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$. Wir müssen zeigen, dass $|\mathcal{P}(M)| = 2^{n+1}$ gilt, also dass M genau 2^{n+1} Teilmengen hat. Wie in Induktionsbeweisen üblich, werden wir dabei von der Induktionsannahme Gebrauch machen, also von der Annahme, dass $P(n)$ wahr ist. Da $P(n)$ wahr ist, hat $\{x_1, \dots, x_n\}$ als n -elementige Menge genau 2^n Teilmengen. Eine Teilmenge von M kann x_{n+1} entweder enthalten oder nicht enthalten. Wenn eine Teilmenge von M das Element x_{n+1} nicht enthält, ist sie eine Teilmenge von $\{x_1, \dots, x_n\}$. Und umgekehrt ist jede Teilmenge von $\{x_1, \dots, x_n\}$ auch eine Teilmenge von M , und zwar eine, die das Element x_{n+1} nicht enthält. Damit sind die Teilmengen von M , welche das Element x_{n+1} nicht enthalten, genau die Teilmengen von $\{x_1, \dots, x_n\}$. Und wie wir gesehen haben, gibt es davon genau 2^n Stück. Um die Anzahl aller Teilmengen von M zu erhalten, müssen wir jetzt noch die Teilmengen von M zählen, die das Element x_{n+1} enthalten. Hierbei handelt es sich genau um die Teilmengen von M , die wir erhalten, indem wir eine Teilmenge A von $\{x_1, \dots, x_n\}$ hernehmen und das Element x_{n+1} hinzufügen. Oder etwas formaler ausgedrückt: es handelt sich um die Mengen $A \cup \{x_{n+1}\}$ mit $A \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. Und wie viele gibt es davon? Genauso viele wie es Teilmengen von $\{x_1, \dots, x_n\}$ gibt, also wieder genau 2^n Stück.

Wir haben nun 2^n Teilmengen von M gezählt, die x_{n+1} enthalten, und weitere 2^n Teilmengen, die x_{n+1} nicht enthalten. Insgesamt hat M also genau 2^{n+1} Teilmengen. Damit gilt $P(n+1)$.

Aufgabe 4

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$n! := \begin{cases} \prod_{i=1}^n i & \text{falls } n > 0 \\ 1 & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

die Fakultät von n . Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

der Binomialkoeffizient von n über k .

(i) Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

(ii) Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie, dass $\binom{n}{k}$ gleich der Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge ist.

(i) Gilt $k > n$, so gilt auch $k+1 > n+1$. Mit $k > n$ gilt auch $k+1 > n$. Somit sind alle der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n+1}{k+1}, \binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}$$

gleich Null. Insbesondere ist die Gleichung

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

erfüllt.

Im Falle $k = n$ haben wir

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot 0!} = 1$$

und ebenso

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} + 0 = 1.$$

Damit ist die zu zeigende Gleichung auch für $k = n$ erfüllt.

Nehmen wir jetzt $k < n$ an. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
 &= \frac{(k+1)n!}{(k+1)k!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)(n-k-1)!} \\
 &= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \quad (n! \text{ ausklammern}) \\
 &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
 &= \binom{n+1}{k+1}.
 \end{aligned}$$

- (ii) Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $P(n)$ die Aussage
Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge.

Wir müssen zeigen, dass $P(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist. Anders ausgedrückt müssen wir zeigen, dass $P(n)$ für jede ganze Zahl $n \geq 0$ wahr ist.

1. Induktionsanfang: Der Induktionsanfang besteht darin, die Gültigkeit von $P(0)$ zu beweisen. Das heißt, wir müssen zeigen, dass die Aussage

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\binom{0}{k}$ die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer 0-elementigen Menge

wahr ist.

Die einzige 0-elementige Menge ist die leere Menge $\emptyset$. Wir müssen also zeigen, dass die leere Menge für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ genau $\binom{0}{k}$ Teilmengen von Mächtigkeit k hat.

Für $k = 0$ stimmt dies: Es gilt $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1$. Gleichzeitig hat $\emptyset$ genau eine 0-elementige Teilmenge, nämlich $\emptyset$ selbst. Folglich hat $\emptyset$ genau $\binom{0}{0}$ Teilmengen von Mächtigkeit 0.

Sei nun $k > 0$ angenommen. Dann gilt $\binom{0}{k} = 0$. Gleichzeitig hat $\emptyset$ keine k -elementige Teilmenge. Folglich hat $\emptyset$ genau $\binom{0}{k} = 0$ Teilmengen von Mächtigkeit k .

Damit ist $P(0)$ bewiesen.

2. Induktionsschritt: Sei ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so dass $P(n)$ wahr ist. Wir wollen folgern, dass dann auch $P(n+1)$ wahr ist. Dazu müssen wir zeigen, dass die Aussage

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\binom{n+1}{k}$ die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer $(n+1)$ -elementigen Menge

wahr ist. Sei dazu $k \in \mathbb{N}_0$ und sei M eine $(n+1)$ -elementige Menge, sagen wir $M = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$. Wir müssen zeigen, dass $\binom{n+1}{k}$ die Anzahl der k -elementigen Teilmengen von M ist. Wir begründen zuerst, dass dies für $k = 0$ zutrifft. Die leere Menge ist die einzige 0-elementige Teilmenge von M . Es gibt also genau eine 0-elementige Teilmenge von M . Zugleich gilt

$$\binom{n+1}{0} = \frac{(n+1)!}{0!(n+1)!} = 1.$$

Für $k = 0$ ist also $\binom{n+1}{k}$ tatsächlich die Anzahl der k -elementigen Teilmengen von M . Nehmen wir jetzt an, dass $k > 0$ gilt. Da $P(n)$ wahr ist, ist $\binom{n}{k-1}$ die Anzahl der $(k-1)$ -elementigen Teilmengen von $\{x_1, \dots, x_n\}$. Nehmen wir eine $(k-1)$ -elementige Teilmenge von $\{x_1, \dots, x_n\}$ und vereinigen wir sie mit $\{x_{n+1}\}$, so erhalten wir eine k -elementige Teilmenge von M , und zwar eine, die x_{n+1} erhält.

Sei nun A eine k -elementige Teilmenge von M mit $x_{n+1} \in A$. Dann gilt $A \setminus \{x_{n+1}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ und $A \setminus \{x_{n+1}\}$ hat Mächtigkeit $k-1$. Folglich können wir A schreiben als die Vereinigung einer $(k-1)$ -elementigen Teilmenge von $\{x_1, \dots, x_n\}$ (nämlich $A \setminus \{x_{n+1}\}$) mit $\{x_{n+1}\}$.

Die k -elementigen Teilmengen von M , welche x_{n+1} enthalten, sind folglich genau die Teilmengen von M , die wir erhalten, indem wir eine $(k-1)$ -elementige Teilmenge von $\{x_1, \dots, x_n\}$ mit $\{x_{n+1}\}$ vereinigen. Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen von M , welche x_{n+1} enthalten, entspricht damit der Anzahl der $(k-1)$ -elementigen Teilmengen von $\{x_1, \dots, x_n\}$. Und wie wir oben gesehen haben, ist diese Anzahl genau $\binom{n}{k-1}$.

Um die Anzahl aller k -elementigen Teilmengen von M zu erhalten, müssen wir jetzt noch die k -elementigen Teilmengen von M zählen, die x_{n+1} nicht enthalten. Aber das sind genau die k -elementigen Teilmengen von $\{x_1, \dots, x_n\}$. Und da $P(n)$ wahr ist, gibt es davon genau $\binom{n}{k}$ Stück.

Die Anzahl aller k -elementigen Teilmengen von M ist folglich gleich

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Aber nach (i) ist dies gleich $\binom{n+1}{k}$. Somit haben wir gezeigt, dass M genau $\binom{n+1}{k}$ Teilmengen von Mächtigkeit k hat. Das war zu zeigen, sodass der Beweis abgeschlossen ist.

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 17.11.2021, 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

für jede natürliche Zahl n erfüllt ist.

Für jede natürliche Zahl n sei $P(n)$ die Aussage

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Wir müssen zeigen, dass $P(n)$ für jede natürliche Zahl n wahr ist.

1. Induktionsanfang: Es gilt

$$\sum_{i=1}^1 i^3 = 1^3 = 1 = \frac{1}{4}1^2(1+1)^2.$$

Somit ist $P(1)$ wahr.

2. Induktionsschritt: Sei ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so dass $P(n)$ wahr ist. Wir wollen folgern, dass auch $P(n+1)$ wahr ist. Dazu müssen wir zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2((n+1)+1)^2 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \sum_{i=1}^n i^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 && \text{da } P(n) \text{ wahr ist} \\ &= \frac{1}{4}(n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4(n+1)) && ((n+1)^2 \text{ ausklammern}) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4n + 4) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2. \end{aligned}$$

Damit gilt $P(n+1)$.

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Sei M eine nichtleere endliche Menge. Sei $P_g(M)$ die Menge aller Teilmengen von M , deren Mächtigkeit gerade ist. Sei $P_u(M)$ die Menge aller Teilmengen von M , deren Mächtigkeit ungerade ist. Zeigen Sie, dass $|P_g(M)| = |P_u(M)|$ gilt.

Sei $m \in M$ und $M_0 := M \setminus \{m\}$. Die Teilmengen von M mit gerader Mächtigkeit sind genau die folgenden Mengen:

- (1) Die Teilmengen von M mit gerader Mächtigkeit, die m nicht enthalten. Dies sind genau die Teilmengen von M_0 mit gerader Mächtigkeit.
- (2) Die Teilmengen von M mit gerader Mächtigkeit, die m enthalten. Dies sind genau die Mengen, die wir erhalten, indem wir eine Teilmenge von M_0 mit ungerader Mächtigkeit hernehmen und diese mit $\{m\}$ vereinigen.

Die Anzahl der Mengen in (1) ist gleich der Anzahl der Teilmengen von M_0 mit gerader Mächtigkeit, also gleich $|P_g(M_0)|$. Die Anzahl der Mengen in (2) ist gleich der Anzahl der Teilmengen von M_0 mit ungerader Mächtigkeit, also gleich $|P_u(M_0)|$. Die Anzahl aller Teilmengen von M mit gerader Mächtigkeit ist also $|P_g(M_0)| + |P_u(M_0)|$.

Die Teilmengen von M mit ungerader Mächtigkeit sind genau die folgenden Mengen:

- (1) Die Teilmengen von M mit ungerader Mächtigkeit, die m nicht enthalten. Dies sind genau die Teilmengen von M_0 mit ungerader Mächtigkeit.
- (2) Die Teilmengen von M mit ungerader Mächtigkeit, die m enthalten. Dies sind genau die Mengen, die wir erhalten, indem wir eine Teilmenge von M_0 mit gerader Mächtigkeit hernehmen und diese mit $\{m\}$ vereinigen.

Wie oben können wir folgern, dass M genau $|P_g(M_0)| + |P_u(M_0)|$ Teilmengen mit ungerader Mächtigkeit hat.

Wir haben gezeigt, dass es genau $|P_g(M_0)| + |P_u(M_0)|$ Teilmengen von M mit gerader Mächtigkeit und genau $|P_g(M_0)| + |P_u(M_0)|$ Teilmengen von M mit ungerader Mächtigkeit gibt. Damit hat M genauso viele Teilmengen mit gerader Mächtigkeit wie mit ungerader Mächtigkeit.

Zusatzaufgabe

Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgabe wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben und eine Rückmeldung zu dieser möchten, können Sie Ihre Lösung zusammen mit Ihren Hausaufgaben in Opal hochladen oder in Ihrer Präsenzübung präsentieren.

Aufgabe 8

Unlängst besuchte ich meinen Freund Arith Metik in seinem Büro. Wir sprachen wie gewöhnlich über Zahlen. Dabei entdeckte ich auf seinem Schreibtisch drei Körper mit jeweils acht Seiten, deren Seiten jeweils mit einer Ziffer beschrieben waren. Arith nahm die Würfel und baute sie in einer Reihe nebeneinander auf. Ich las: 001. "Gut", sagte Herr Metik, "das ist die Zahl 1. Jetzt baue ich die Zahl 2." Ich las 002. Und so fuhr er fort: "003, 004, 005, ...". Als er bei der Zwölf, also bei 012, angekommen war, meinte er: "So geht das weiter, bis - ja, bis zu welcher Zahl kann man mit drei solchen Ziffernkörper zählen, ohne dabei eine Zahl auszulassen?" Ich erklärte, das könne ich ihm nicht sagen, denn dazu müsste ich wissen, mit welchen Ziffern jeder Körper beschrieben sei, doch Arith antwortete: "Das habe ich optimal gemacht, also so, dass man damit - wie gesagt, ohne eine Zahl dabei auszulassen - möglichst hoch zählen kann. Seit diesem Gespräch überlege ich, wie wohl die jeweils acht Seiten des Körpers mit Ziffern beschrieben sein müssen (gemeint sind wirklich einzelne Ziffern, nicht etwa aus mehreren Ziffern zusammengesetzte Zahlen) und wie weit man mit den drei Würfeln zählen kann. Anmerkung: Die 6 und die 9 sind unterscheidbar. Man kann also durch das Drehen des Körpers nicht aus der 6 eine 9 machen!"

Wir machen uns zunächst klar, dass jeder der drei Körper eine mit einer Null beschriebene Seitenfläche haben muss. Klar ist, dass mindestens zwei der Körper mit einer Null beschriftet sein müssen, da man sonst noch nicht einmal 001 legen könnte. Nehmen wir an, es seien nur genau zwei der Körper mit einer Null beschrieben. Um die Zahlen 1 bis 9 zu legen, brauchen wir dann jeweils die Nullen dieser beiden Körper. Die Ziffern 1 bis 9 müssten dann auf dem dritten Körper erscheinen. Dieser hat aber nur acht Seitenflächen. Daher ist dies nicht möglich. Es muss also auf jedem der drei Körper eine Null vorkommen.

Wir machen uns nun klar, dass man nicht weiter als bis 443 zählen kann. Nehmen wir an, das ginge. Dann könnte man bis 444 zählen. Mit den drei Körpern müsste man dann also die Zahlen 111, 222, 333 und 444 legen können. Damit würde jeder der Körper mit einer Eins, mit einer Zwei, mit einer Drei sowie mit einer Vier beschriftet sein. Wie wir oben gesehen haben, ist auch jeder der Körper mit einer Null beschriftet. Hiermit sind schon $3 \cdot 5 = 15$ Seitenflächen für die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 vergeben. Wenn wir bis 444 zählen können, dann müssen wir auch die Zahlen 55, 66, 77, 88 und 99 legen können. Somit muss jede der Zahlen 5, 6, 7, 8, 9 auf mindestens zwei Seitenflächen vorkommen. Damit sind $5 \cdot 2 = 10$ Seitenflächen an die eben genannten Zahlen vergeben. Wenn aber 15 Seitenflächen mit den Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 und weitere 10 Seitenflächen mit den restlichen Zahlen beschriftet sind, dann bedeutet das, dass wir mindestens 25 verschiedene Seitenflächen zur Verfügung haben. Das ist aber nicht der Fall, da jeder Körper genau 8 Seitenflächen hat und wir nur drei Körper haben. Folglich ist es nicht möglich, bis 444 zu zählen.

Man kann jedoch bis 443 zählen. Das ist z. B. möglich, wenn wir die Seitenflächen der einzelnen Körper mit den unten angegebenen Zahlen beschriften:

Körper 1: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8

Körper 2: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9

Körper 3: 0, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9