

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der siebten Präsenzübung. Der späteste Abgabetermin ist der 1.12. um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem siebten Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 7* finden.

Lösung der ersten Vorbereitungsaufgabe

Die Aufgabenstellung lautete wie folgt:

Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ als einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und der üblichen Skalarmultiplikation (vgl. Beispiel 3.2 im Skript). Sei

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \right\}.$$

Ist T_1 ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$?

Wir zeigen, dass T_1 ein Unterraum ist, indem wir (S0), (S1) und (S2) aus Definition 3.10 verifizieren.

(S0) Es gilt $0_{\mathbb{R}^4} \in T_1$.

(S1) Seien $v := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} \in T_1$. Wegen $v, w \in T_1$ gilt $b + c - 2d = 0$ und $b' + c' - 2d' = 0$. Wir berechnen

$$v + w = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \\ d + d' \end{pmatrix}.$$

Es gilt $(b + b') + (c + c') - 2(d + d') = (b + c - 2d) + (b' + c' - 2d') = 0 + 0 = 0$. Somit $v + w \in T_1$.

(S2) Sei $v := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in T_1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $v \in T_1$ gilt $b + c - 2d = 0$. Wir berechnen

$$\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix}.$$

Wegen $\lambda b + \lambda c - 2\lambda d = \lambda(b + c - 2d) = \lambda \cdot 0 = 0$ folgt $\lambda v \in T_1$.

Lösung der zweiten Vorbereitungsaufgabe

Die Aufgabenstellung lautete wie folgt:

Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ als einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und der üblichen Skalarmultiplikation (vgl. Beispiel 3.2 im Skript). Sei

$$T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 1 \right\}.$$

Ist T_2 ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$?

Es ist T_2 kein Unterraum, denn es gilt $0_{\mathbb{R}^4} \notin T_2$, womit (S0) aus Definition 3.10 nicht erfüllt ist.

Lösung der dritten Vorbereitungsaufgabe

Die Aufgabenstellung lautete wie folgt:

Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ als einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und der üblichen Skalarmultiplikation (vgl. Beispiel 3.2 im Skript). Sei

$$T_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Ist T_3 ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$?

Es ist T_3 kein Unterraum, denn z. B. gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in T_3$, aber $\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin T_3$.

Lösung der vierten Vorbereitungsaufgabe

In dieser Aufgabe waren die richtigen der folgenden Aussagen auszuwählen.

(1) $\mathbb{Q}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$, dessen Addition die übliche Addition in $\mathbb{Q}$ ist und dessen Skalarmultiplikation mit der üblichen Multiplikation in $\mathbb{Q}$ übereinstimmt.

(2) $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$, dessen Addition die übliche Addition in $\mathbb{R}$ ist und dessen Skalarmultiplikation durch

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

gegeben ist, wobei λx das übliche Produkt der Zahlen λ und x ist.

(3) $\mathbb{Q}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, dessen Addition die übliche Addition in $\mathbb{Q}$ ist und dessen Skalarmultiplikation durch

$$\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

gegeben ist, wobei λx das übliche Produkt der Zahlen λ und x ist.

(4) $\mathbb{R}^2$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$, dessen Addition die übliche Addition in $\mathbb{R}^2$ ist und dessen Skalarmultiplikation durch

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ und alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

(5) $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, dessen Addition die übliche Addition in $\mathbb{R}$ ist und dessen Skalarmultiplikation mit der üblichen Multiplikation in $\mathbb{R}$ übereinstimmt.

(1) und (5) sind richtig nach Beispiel 3.4. (2) ist richtig nach Beispiel 3.6. (4) ist ebenfalls richtig, der Beweis verläuft analog zum Beweis in Aufgabe 6 auf Blatt 6. (3) ist falsch, weil die Skalarmultiplikation

$$\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

nicht wohldefiniert ist. Denn für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{Q}$ gilt im Allgemeinen nicht $\lambda x \in \mathbb{Q}$, z. B. gilt $\lambda x \notin \mathbb{Q}$ wenn $\lambda = \sqrt{2}$ und $x = 1$.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

In den folgenden beiden Teilaufgaben, also in (a) und (b), geht es um Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ für gegebene natürliche Zahlen n . Dabei ist $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Addition und der üblichen Skalarmultiplikation versehen (siehe Beispiel 3.2 im Skript).

(a) Sei $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \right\}$.

(a1) Wenn $u, v \in V$, ist dann auch $u + v \in V$?

(a2) Wenn $u \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, ist dann auch $\lambda u \in V$?

(a3) Ist V ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$?

(b) Sind die folgenden Teilmengen Unterräume?

(b1) $S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b2) $S_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b3) $S_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y + z \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(b4) $S_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid |x + y| = |z| \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(b5) $S_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z + w = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(c) Entscheiden Sie, ob $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Addition und der jeweils angegebenen Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

(c1) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c2) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda^5 x \\ \lambda^5 y \end{pmatrix}$.

Lösung

(a1) Seien $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Weil $u_i, v_i \geq 0$ für $i \in \{1, 2\}$ gilt, gilt auch $u_i + v_i \geq 0$ für $i \in \{1, 2\}$, d.h., dass $u + v \in V$ ist.

(a2) Seien $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\lambda = -1$. Dann ist $u \in V$, aber $\lambda u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin V$.

(a3) Wegen (a2) ist V kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

(b1) Es gilt $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$. Wir zeigen, dass S_1 ein Unterraum ist, indem wir (S0), (S1) und (S2) aus Definition 3.10 verifizieren.

(S0) Es gilt $0_{\mathbb{R}^2} \in S_1$.

(S1) Für $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} \in S_1$ gilt auch $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y+w \end{pmatrix} \in S_1$.

(S2) Für $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in S_1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda y \end{pmatrix} \in S_1$.

(b2) Es gilt $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$. Wegen $0_{\mathbb{R}^2} \notin S_2$ ist S_2 kein Unterraum.

(b3) Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es ist $v \in S_3$, aber es gilt $2v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin S_3$. Somit ist S_3 kein Unterraum.

(b4) Seien $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, sodass $u, v \in S_4$ gilt. Es ist $u+v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin S_4$, weil $|2+1| = 3 \neq 1 = |-1|$. Deswegen ist S_4 kein Unterraum.

(b5) Es ist S_5 ein Unterraum. Um dies zu zeigen, verifizieren wir (S0), (S1) und (S2) aus Definition 3.10.

(S0) Es gilt $0_{\mathbb{R}^4} \in S_5$.

(S1) Seien $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \in S_5$. Dann gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \\ w+w' \end{pmatrix}$. Weil

$$(x+x') - (y+y') + 2(z+z') + (w+w') = (x-y+2z+w) + (x'-y'+2z'+w') = 0+0 = 0$$

gilt, ist $u+v \in S_5$.

(S2) Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, dann $\lambda u = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \\ \lambda w \end{pmatrix}$. Weil

$$\lambda x - \lambda y + 2\lambda z + \lambda w = \lambda(x - y + 2z + w) = 0$$

gilt, ist $\lambda u \in S_5$.

(c1) Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$. Dann ist $1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Damit liegt kein Vektorraum vor.

(c2) Wir beweisen, dass die Distributivität der Skalarmultiplikation nicht gegeben ist. Seien $\lambda := 1 =: \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und andererseits

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Skalarmultiplikation ist also nicht distributiv, womit kein Vektorraum vorliegt.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V := K^n$. Wir betrachten V als Vektorraum über K mit der üblichen Addition und der üblichen Skalarmultiplikation (vgl. Beispiel 3.2 im Skript). Für $1 \leq i \leq n$ sei

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n,$$

wobei der i -te Eintrag gleich 1 sei. Beschreiben Sie die Unterräume $V_m := \langle e_1, e_2, \dots, e_m \rangle$ für alle $m \in \{1, \dots, n\}$.

(b) Sei nun V ein beliebiger Vektorraum über K und $v_1, v_2, v_3 \in V$, so dass $v_2, v_3 \notin \langle v_1 \rangle$ und $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$. Zeigen Sie, dass $v_2 \notin \langle v_1, v_3 \rangle$. Folgern Sie, dass $\langle v_1, v_2 \rangle \neq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ und $\langle v_1, v_3 \rangle \neq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Lösung

(a) Sei $m \in \{1, \dots, n\}$. Nach Definition, ist

$$V_m = \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m \mid \lambda_i \in K \text{ für alle } 1 \leq i \leq m\}$$

Für $1 \leq i \leq m$ gilt $\lambda_i e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei λ_i der i -te Eintrag ist. Es folgt

$$V_m = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n \mid v_{m+1} = v_{m+2} = \dots = v_n = 0 \right\}.$$

(b) Wir zeigen zuerst, dass $v_2 \notin \langle v_1, v_3 \rangle$. Nehmen wir an, dies sei nicht der Fall, sodass also $v_2 \in \langle v_1, v_3 \rangle$ gilt. Dann existieren $\lambda, \mu \in K$ mit $v_2 = \lambda v_1 + \mu v_3$. Es ist $\mu \neq 0$, denn andernfalls wäre $v_2 = \lambda v_1 \in \langle v_1 \rangle$, was ein Widerspruch zu unseren Voraussetzungen wäre. Mit $\mu \neq 0$ existiert μ^{-1} . Es gilt nun $v_3 = -\mu^{-1} \lambda v_1 + \mu^{-1} v_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle$. Das ist ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung, dass $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$. Folglich muss die Annahme, dass $v_2 \in \langle v_1, v_3 \rangle$ gilt, falsch sein. Es gilt somit $v_2 \notin \langle v_1, v_3 \rangle$.

Wir folgern nun, dass $\langle v_1, v_2 \rangle \neq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Nehmen wir an, es bestünde Gleichheit. Dann würde $v_3 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ gelten, was ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung ist, dass $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$.

Jetzt folgern wir, dass $\langle v_1, v_3 \rangle \neq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Nehmen wir an, es bestünde Gleichheit. Dann würde $v_2 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle$ gelten. Wir wissen aber bereits, dass $v_2 \notin \langle v_1, v_3 \rangle$ gilt. Aufgrund dieses Widerspruchs muss die Annahme $\langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ falsch sein, womit also $\langle v_1, v_3 \rangle \neq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ gilt.

Aufgabe 4

Sei $V := \mathbb{R}^4$. Wir betrachten V als Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und der üblichen Skalarmultiplikation (vgl. Beispiel 3.2 im Skript). Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 die in Aufgabe 3 (b) angenommenen (und damit auch die daraus abgeleiteten) Eigenschaften haben.
- (b) Zeigen Sie, dass $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \neq V$.

Lösung

- (a) Für alle $k \in \mathbb{R}$ ist $kv_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix}$. Damit kann es kein $k \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = kv_1$ oder $v_3 = kv_1$ geben. Folglich gilt $v_2, v_3 \notin \langle v_1 \rangle$.

Wir zeigen als nächstes, dass $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$. Dazu nehmen wir an, dass $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$ gilt, und leiten daraus einen Widerspruch ab. Wegen $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$ existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $v_3 = av_1 + bv_2$. Damit gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 2a + b \end{pmatrix}$$

Hieraus können wir aber den Widerspruch $0 = 1$ ablesen. Aufgrund dieses Widerspruchs muss unsere Annahme, dass $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$ gilt, falsch sein. Somit gilt $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$.

- (b) Es reicht aus, einen Vektor aus V zu finden, der nicht in $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ liegt. Sei $u := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Angenommen, es gilt $u \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Dann existieren $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $u = av_1 + bv_2 + cv_3$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ c \\ c \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt $b = 0, c = 1, a + c = 0$, sodass $a = -1$ ist. Damit gilt weiter $0 = 2a + b + c = -2 + 0 + 1 = -1$, ein Widerspruch. Daraus folgt, dass $u \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ gilt. Folglich muss $V \neq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ gelten.

Aufgabe 5 (optional)

Diese Aufgabe wird in den Übungen nur besprochen, wenn es die Zeit erlaubt. Sollte diese Aufgabe nicht in Ihrer Übung besprochen werden, so ist es eine gute Übung für Sie, sie eigenständig zu bearbeiten.

Sei K ein Körper und sei V ein Vektorraum über K . Sind U und W Unterräume von V , so schreiben wir $V = U \oplus W$, wenn $V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$.

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und der üblichen Skalarmultiplikation. Seien

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \right\} \quad \text{und} \quad W := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeigen Sie,

- (a) dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist,
- (b) dass $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ gilt.

Lösung

- (a) Wir verifizieren (S0), (S1) und (S2) aus Definition 3.10

(S0) Es gilt $0_{\mathbb{R}^3} \in U$.

(S1) Seien $u := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $v := \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ Elemente von U . Dann gilt $x - y = 0 = x' - y'$.

Es gilt

$$u + v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

und $(x + x') - (y + y') = (x - y) + (x' - y') = 0 + 0 = 0$. Somit gilt $u + v \in U$.

(S2) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda u = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

Wegen $\lambda x - \lambda y = \lambda(x - y) = \lambda \cdot 0 = 0$ folgt $\lambda u \in U$.

(b) Wir müssen zeigen, dass $\mathbb{R}^3 = U + W$ und $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ gelten. Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y - x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - y \\ 0 \\ x - y \end{pmatrix} \in U + W.$$

D.h., dass $\mathbb{R}^3 = U + W$ gilt.

Wenn $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U \cap W$ ist, dann gelten $y = 0$ und $x = z$. Aber nach Definition von U gilt auch $x = y$. Es folgt $x = y = z = 0$, d.h. $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ gilt.

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 8.12., 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Sei G eine Gruppe und seien A und B Untergruppen von G . Zeigen Sie:

- (a) $A \cap B$ ist eine Untergruppe von G ;
- (b) $A \cup B$ ist eine Untergruppe von G genau dann, wenn $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$ ist.
- (c) Zeigen Sie, dass (b) auch für Unterräume von Vektorräumen gilt. Zeigen Sie also folgendes: Sind V ein Vektorraum über einem Körper K und sind U und W Unterräume von V , so ist $U \cup W$ genau dann ein Unterraum von V , wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

Bemerkung: Nach Lemma 3.18 im Skript gilt auch (a) für Unterräume von Vektorräumen statt Untergruppen von Gruppen.

Lösung

(a) Wir verifizieren (U0), (U1) und (U2) aus Definition 2.5.

(U0) Da A und B Untergruppen von G sind, gilt $1_G \in A$ und $1_G \in B$. Somit gilt $1_G \in A \cap B$.

- (U1) Seien $x, y \in A \cap B$. Dann gilt $x \in A$ und $y \in A$. Da A eine Untergruppe von G ist, folgt $xy \in A$. Analog zeigt man, dass $xy \in B$ gilt. Damit gilt $xy \in A \cap B$.
- (U2) Sei $x \in A \cap B$. Dann gilt $x \in A$ und $x \in B$. Da A und B Untergruppen von G sind, gilt $x^{-1} \in A$ und $x^{-1} \in B$. Es folgt $x^{-1} \in A \cap B$.
- (b) $\Rightarrow$: Wenn $A \subseteq B$ gilt, dann $A \cup B = B$. Damit ist $A \cup B$ eine Untergruppe von G , weil B eine Untergruppe von G ist. Analog sieht man, dass $A \cup B$ eine Untergruppe von G ist, wenn $B \subseteq A$ gilt.
- $\Leftarrow$: Sei nun angenommen, dass $A \cup B$ eine Untergruppe von G ist. Wir haben zu zeigen, dass $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$ gilt.
- Dazu nehmen wir an, dass $A \not\subseteq B$ gilt, und weisen nach, dass $B \subseteq A$ gelten muss (wir können $A \not\subseteq B$ annehmen, denn wenn diese Annahme nicht zutrifft, gilt $A \subseteq B$ und es ist nichts zu beweisen). Sei $b \in B$. Um $B \subseteq A$ zu zeigen, müssen wir $b \in A$ nachweisen. Wegen $A \not\subseteq B$ existiert ein $a \in A \setminus B$. Es gilt $ab \in A \cup B$, weil sowohl a als auch b ein Element von $A \cup B$ ist und $A \cup B$ eine Untergruppe von G ist. Es ist jedoch $ab \notin B$, denn andernfalls gäbe es ein $\tilde{b} \in B$ mit $ab = \tilde{b}$, woraus dann $a = \tilde{b}b^{-1} \in B$ folgen würde, was nach Wahl von a nicht der Fall ist. Aus $ab \in A \cup B$ und $ab \notin B$ folgt nun $ab \in A$. Es gibt also ein $\tilde{a} \in A$ mit $ab = \tilde{a}$. Damit gilt, wie gewünscht, $b = a^{-1}\tilde{a} \in A$.
- (c) $\Leftarrow$: Angenommen, es gilt $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$. Im ersten Fall gilt $U \cup W = W$, im zweiten gilt $U \cup W = U$. Da U und W Unterräume von V sind, folgt, dass auch $U \cup W$ ein Unterraum von V ist.
- $\Rightarrow$: Angenommen, es ist $U \cup W$ ein Unterraum von V . Aus der Definition eines Unterraums ist ersichtlich, dass $U \cup W$ dann auch eine Untergruppe von $(V, +)$ ist sowie dass U und W Untergruppen von $(V, +)$ sind. Nach (b) muss damit $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gelten.

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Seien X eine nichtleere Menge und $V := \text{Abb}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$. Definiere

$$\begin{aligned} + : \quad V \times V &\longrightarrow V \\ (f, g) &\longmapsto f + g : X \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, g) &\longmapsto \lambda \cdot g : X \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit $(\lambda \cdot g)(x) := \lambda g(x)$.

- (a) Zeigen Sie, dass V mit den Operationen $+$ und $\cdot$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.
- (b) Sei $U := \{f \in V \mid |f(X)| \text{ ist endlich}\}$. Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von V ist.

Lösung

(a) Wir zeigen zunächst, dass V zusammen mit der in der Aufgabenstellung definierten Addition $+$ eine abelsche Gruppe ist. Anschließend zeigen wir, dass die Skalarmultiplikation assoziativ und distributiv ist und dass $1f = f$ für alle $f \in V$ gilt.

- Um zu zeigen, dass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist, weisen wir zunächst nach, dass $+$ assoziativ ist. Seien dazu $f, g, h \in V$ und $x \in X$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) = (f + (g + h))(x). \end{aligned}$$

Es gilt also $((f + g) + h)(x) = (f + (g + h))(x)$ für alle $x \in X$. Somit gilt $(f + g) + h = f + (g + h)$.

Es ist $+$ kommutativ, denn $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$ für alle $x \in X$.

Die Abbildung $\underline{0} : X \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\underline{0}(x) = 0$ für alle $x \in X$ ist neutral bezüglich $+$, weil $(f + \underline{0})(x) = f(x) + 0 = f(x)$ für alle $f \in V$ und alle $x \in X$.

Für jedes $f \in V$ definieren wir $(-f) : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch $(-f)(x) = -f(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist $-f$ invers zu f bezüglich $+$, weil $(f + (-f))(x) = f(x) - f(x) = 0$ für alle $x \in X$ gilt, sodass $f + (-f) = \underline{0}$.

- Wir zeigen nun die Assoziativität der Skalarmultiplikation. Seien $f \in V$ und $h, k \in \mathbb{R}$. Dann gilt $((hk)f)(x) = (hk)f(x) = h(kf(x)) = h((kf)(x)) = (h(kf))(x)$ für alle $x \in X$. Es gilt also $(hk)f = h(kf)$.
- Wir zeigen nun die Distributivgesetze für die Skalarmultiplikation. Seien $h, k \in \mathbb{R}$, $f, g \in V$ und $x \in X$. Dann gilt

$$((h + k)f)(x) = (h + k)f(x) = hf(x) + kf(x) = (hf)(x) + (kf)(x) = (hf + kf)(x)$$

und somit $(h + k)f = hf + kf$. Es gilt außerdem

$$(h(f + g))(x) = h(f + g)(x) = h(f(x) + g(x)) = hf(x) + hg(x) = (hf + hg)(x).$$

und somit $h(f + g) = hf + hg$.

- Es gilt auch $(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$ für alle $f \in V$ und $x \in X$, d.h. $1f = f$.

(b) Wir zeigen, dass (S0), (S1) und (S2) aus Definition 3.10 erfüllt sind.

(S0) Es ist $\underline{0} \in U$, weil $\underline{0}(X) = \{0\}$ gilt.

(S1) Seien $f, g \in U$. Dann sind $f(X)$ und $g(X)$ endlich, also $n := |f(X)| \in \mathbb{N}_0$ und $m := |g(X)| \in \mathbb{N}_0$. Es gilt $(f + g)(X) = \{(f + g)(x) \mid x \in X\} \subseteq \{f(x) + g(y) \mid x, y \in X\}$. Da $f(x)$ nur n mögliche Werte und $g(y)$ nur m mögliche Werte annehmen kann, hat die letztgenannte Menge höchstens die Mächtigkeit nm . Damit gilt $|(f + g)(X)| \leq nm$, d.h., dass $(f + g)(X)$ endlich ist. Deswegen gilt $f + g \in U$.

(S2) Sei $k \in \mathbb{R}$. Dann $(kf)(X) = \{kf(x) \mid x \in X\}$. Die Abbildung

$$\varphi : f(X) \rightarrow (kf)(X), f(x) \mapsto kf(x).$$

ist surjektiv. Lemma 1.19 impliziert $|(kf)(X)| \leq |f(X)|$. Da $f(X)$ wegen $f \in U$ endlich ist, folgt, dass auch $(kf)(X)$ endlich ist.

Zusatzaufgabe

Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgabe wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben und eine Rückmeldung zu dieser möchten, können Sie Ihre Lösung zusammen mit Ihren Hausaufgaben in Opal hochladen oder in Ihrer Präsenzübung präsentieren.

Aufgabe 8

Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition $+\mathbb{R}^2$ und der üblichen Skalarmultiplikation $\cdot_{\mathbb{R}^2}$. Sei $M := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Wir können ein Element (P, Q) von M als einen Pfeil auffassen, der im Punkt P beginnt und im Punkt Q endet.

Für alle $P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ definieren wir die Abbildung

$$t_P : \quad M \longrightarrow M \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \left(\begin{pmatrix} x_1 + x_P \\ y_1 + y_P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 + x_P \\ y_2 + y_P \end{pmatrix} \right).$$

Sei $\sim \subseteq M \times M$ die Relation definiert durch

$$(A, B) \sim (C, D) \iff \exists P \in \mathbb{R}^2 \text{ sodass } t_P((A, B)) = (C, D).$$

(a) Prüfen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Sei $V := M / \sim$ die Menge der Äquivalenzklassen.

(b) Definiere $+: V \times V \longrightarrow V$ und $\cdot: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ durch

$$[(A, B)] + [(C, D)] := [(A +_{\mathbb{R}^2} C, B +_{\mathbb{R}^2} D)] \quad \text{und} \quad \lambda \cdot [(A, B)] := [\lambda \cdot_{\mathbb{R}^2} (A, B)].$$

Zeigen Sie, dass $+$ und $\cdot$ wohldefiniert sind und dass V mit den Operationen $+$ und $\cdot$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass jede Klasse $[(A, B)]$ einen Repräsentanten (O, C) mit $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ hat.

Lösung

- (a) Wir müssen zeigen, dass $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Für $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $(A, B) = t_P((A, B))$ für alle $(A, B) \in M$. Damit ist $\sim$ reflexiv.

Sei $(A, B) \sim (C, D)$, d.h. es existiert $P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $(C, D) = t_P((A, B))$. Für $Q := \begin{pmatrix} -x_P \\ -y_P \end{pmatrix}$ gilt $(A, B) = t_Q((C, D))$, sodass $(C, D) \sim (A, B)$ gilt und $\sim$ symmetrisch ist.

Seien $(A, B) \sim (C, D)$ und $(C, D) \sim (E, F)$, d.h. es existieren $P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix}$ mit $(C, D) = t_P((A, B))$ und $(E, F) = t_T((C, D))$. Es ist $P +_{\mathbb{R}^2} T = \begin{pmatrix} x_P + x_T \\ y_P + y_T \end{pmatrix}$ und es gilt $t_T \circ t_P = t_{(P +_{\mathbb{R}^2} T)}$. Das impliziert, dass

$$(E, F) = t_T((C, D)) = t_T(t_P((A, B))) = t_{(P +_{\mathbb{R}^2} T)}((A, B))$$

gilt, sodass $(A, B) \sim (E, F)$ und $\sim$ transitiv ist.

Die Relation $\sim$ identifiziert genau die Pfeile, die parallel sind und gleiche Länge und Richtung haben.

- (b) Wir beweisen zunächst, dass $+$ und $\cdot$ wohldefiniert sind.

Für $(A, B) \in M$ und $P \in \mathbb{R}^2$ schreiben wir $t_P(A, B) = (t_P(A), t_P(B))$, das heißt

$$t_P(A) = \begin{pmatrix} x_A + x_P \\ y_A + y_P \end{pmatrix}.$$

Seien $(A, B) \sim (A', B')$ und $(C, D) \sim (C', D')$. Dann existieren $P, Q \in \mathbb{R}^2$ mit $(A', B') = t_P((A, B))$ und $(C', D') = t_Q((C, D))$. Dann

$$\begin{aligned} [(A', B')] + [(C', D')] &= [(t_P(A), t_P(B))] + [(t_Q(C), t_Q(D))] = \\ &= [(t_P(A) +_{\mathbb{R}^2} t_Q(C), t_P(B) +_{\mathbb{R}^2} t_Q(D))] = [(t_{P+_{\mathbb{R}^2} Q}(A +_{\mathbb{R}^2} C), t_{P+_{\mathbb{R}^2} Q}(B +_{\mathbb{R}^2} D))] = \\ &= [(A +_{\mathbb{R}^2} C, B +_{\mathbb{R}^2} D)] = [(A, B)] + [(C, D)]. \end{aligned}$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda \cdot [(A', B')] &= [(\lambda \cdot_{\mathbb{R}^2} A', \lambda \cdot_{\mathbb{R}^2} B')] = [(\lambda \cdot_{\mathbb{R}^2} t_P(A), \lambda \cdot_{\mathbb{R}^2} t_P(B))] = \\ &= [(\lambda \cdot_{\mathbb{R}^2} A +_{\mathbb{R}^2} \lambda \cdot_{\mathbb{R}^2} P, \lambda \cdot_{\mathbb{R}^2} B +_{\mathbb{R}^2} \lambda \cdot_{\mathbb{R}^2} P)] = \\ &= [t_{\lambda P}(\lambda \cdot_{\mathbb{R}^2} (A, B))] = \lambda \cdot [(A, B)]. \end{aligned}$$

Damit ist die Wohldefiniertheit gezeigt. Durch routinemäßiges Nachrechnen bestätigt man die Vektorraumaxiome.

- (c) Sei $(A, B) \in M$. Dann ist $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Sei $-A = \begin{pmatrix} -x_A \\ -y_A \end{pmatrix}$, dann gilt

$$(A, B) \sim t_{-A}((A, B)) = (O, B - A).$$

Aufgabe 9

Seien A, B, C Unterräume eines Vektorraums V über einem Körper K und sei $V := A \cup B \cup C$.

- (a) Zeigen Sie, dass $|K| = 2$ ist oder ein $X \in \{A, B, C\}$ mit $V = X$ existiert.

Tipp:

Nehmen Sie $|K| > 2$ an. Machen Sie sich klar, dass Elemente $k, h \in K$ mit $k, h \neq 0$ und $k - h = 1$ existieren.

Wenn $u \in A \setminus (A \cap B)$ und $w \in B \setminus (A \cap B)$, was können Sie über $ku + w$, $hu + w$ und u sagen?

- (b) Geben Sie ein Beispiel an, in dem $A, B, C \neq V$ und $V = A \cup B \cup C$ gelten.
- (c) Was kann man sagen, wenn V eine Gruppe und A, B, C Untergruppen sind?

Lösung

- (a) Sei $|K| > 2$. Wir zeigen zunächst die Existenz der Elemente aus dem Hinweis. Wenn $1 + 1 \neq 0$ gilt, wählen wir $k = 2 := 1 + 1$ und $h = 1$. Andernfalls wählen wir ein Element $l \notin \{0, 1\}$ von K und beobachten, dass $l - 1 \notin \{0, 1\}$; dann setzen wir $k = l$ und $h = l - 1$. Wenn einer der Unterräume A, B oder C in einem anderen enthalten ist, dann ist V die Vereinigung zweier der Unterräume. Wenn zum Beispiel $A \subseteq B$ gilt, dann ist $V = B \cup C$. Aufgabe 6 (c) impliziert dann, dass V mit einem der Unterräume A, B, C übereinstimmt. Betrachten wir jetzt den Fall, dass keiner der Unterräume A, B, C in einem anderen der drei Unterräume enthalten ist. Dann gilt $A \neq A \cap B \neq B$. Seien $u \in A \setminus (A \cap B)$ und $w \in B \setminus (A \cap B)$. Seien außerdem $k, h \in K$. Wenn $ku + w \in A$ gilt, dann existiert $a \in A$ mit $ku + w = a$; insbesondere ist $w = a - ku \in A$. D.h., es gilt $w \in A \cap B$, ein Widerspruch zur Wahl von w , sodass $ku + w \notin A$. Wäre $ku + w \in B$, so wäre $ku \in B$. Wegen $u \in A$ gilt auch $ku \in A$. Mit $ku + w \in B$ wäre also $ku \in A \cap B$, also auch $u = k^{-1}ku \in A \cap B$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von u , womit $ku + w \notin B$ gilt. Weil $V = A \cup B \cup C$ gilt, folgt $ku + w \in C$.

Analog zeigt man, dass $hu + w$ in C liegt. Es folgt, dass $u = (k - h)u = (ku + w) - (hu + w) \in C$ ist.

Analog zum Nachweis, dass $u \in C$ gilt, kann man auch argumentieren, dass $w \in C$ gilt. Da u und w beliebig gewählte Elemente von $A \setminus (A \cap B)$ bzw. von $B \setminus (A \cap B)$ waren, folgt

$$A \setminus (A \cap B) \subseteq C \quad \text{und} \quad B \setminus (A \cap B) \subseteq C. \quad (\star)$$

Seien $y \in A \cap B$ und $x \in B \setminus (A \cap B)$. Wenn $y + x \in A \cap B$ ist, gilt auch $x \in A \cap B$, ein Widerspruch. Daraus folgt, dass $y + x \notin A \cap B$ gilt. Das impliziert, dass $y + x$ in $A \setminus (A \cap B)$ oder $B \setminus (A \cap B)$ oder C enthalten ist. Nach $(\star)$ gilt in allen Fällen $y + x \in C$. Aber es gilt $x \in B \setminus (A \cap B) \subseteq C$, sodass auch $y \in C$ gilt. Da y ein beliebig gewähltes

Element von $A \cap B$ war, folgt $A \cap B \subseteq C$. Mit $(\star)$ folgt, dass $A \subseteq C$ und $B \subseteq C$ gelten. Damit gilt $V = C$.

(b) Sei $F := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sodass $|F| = 2$ gilt, und $V = F^2$. Dann

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

mit Standardbasis $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Sei $e_3 = e_1 + e_2$.
Dann gilt $V = \langle e_1 \rangle \cup \langle e_2 \rangle \cup \langle e_3 \rangle$.

(c) Die Argumente in (b) lassen sich auf Gruppen übertragen.