

Aufgabe 1

Gegeben seien die Mengen $A := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < 2x^2 + 1 < 100\}$, $B := \{x \in \mathbb{N} \mid |x - 7| \leq 3\}$, $C := \{2z \mid z \in \mathbb{Z}, z^2 \geq 4\}$ und $D := \{3, 4\}$.

(a) Berechnen Sie die Mengen

$$A \cup B, \quad B \cap C, \quad \mathcal{P}(B \cap C), \quad A \times D, \quad (A \setminus B) \setminus C, \quad A \setminus (B \setminus C).$$

(b) Für jede natürliche Zahl n sei $M_n := \{m \mid m \in \mathbb{N}, m \leq n\}$. Bestimmen Sie

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \quad \text{und} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n.$$

(a) Zunächst schreiben wir die Mengen A , B und C in aufzählender Schreibweise auf.

Fangen wir mit der Menge A an. Für $x \in \mathbb{N}$ gilt

$$10 < 2x^2 + 1 \Leftrightarrow 9 < 2x^2 \Leftrightarrow \frac{9}{2} < x^2.$$

Für $x \in \mathbb{N}$ ist letzteres genau dann erfüllt, wenn $x \geq 3$. Ebenso gilt

$$2x^2 + 1 < 100 \Leftrightarrow 2x^2 < 99 \Leftrightarrow x^2 < \frac{99}{2}.$$

Dies ist für $x \in \mathbb{N}$ genau dann erfüllt, wenn $x \leq 7$. Eine natürliche Zahl x erfüllt die Bedingung $10 < 2x^2 + 1 < 100$ also genau dann, wenn $3 \leq x \leq 7$. Deshalb gilt

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Für $x \in \mathbb{N}$ gilt $|x - 7| \leq 3$ genau dann, wenn $4 \leq x \leq 10$. Somit gilt

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Eine ganze Zahl z erfüllt die Bedingung $z^2 \geq 4$ genau dann, wenn der Betrag von z größer gleich 2 ist. Es gilt also

$$C = \{2z \mid z \in \mathbb{Z}, |z| \geq 2\} = \{2z \mid z \in \mathbb{Z}, z \geq 2 \vee z \leq -2\} = \{\pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \dots\}.$$

Wir können nun die eigentliche Aufgabe (a) lösen. Die Vereinigung $A \cup B$ enthält alle Elemente, die in mindestens einer der Mengen A , B liegen. Wir erhalten

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Die Schnittmenge $B \cap C$ enthält alle Elemente, die sowohl in B als auch in C liegen. Es gilt also

$$B \cap C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{\pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \dots\} = \{4, 6, 8, 10\}.$$

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(B \cap C)$ ist die Menge aller Teilmengen von $B \cap C$. Dabei dürfen wir nicht die leere Menge vergessen, denn wie wir wissen, ist diese eine Teilmenge jeder Menge. Es gilt nun

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(B \cap C) &= \mathcal{P}(\{4, 6, 8, 10\}) \\ &= \{\emptyset, \{4\}, \{6\}, \{8\}, \{10\}, \\ &\quad \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{4, 10\}, \{6, 8\}, \{6, 10\}, \{8, 10\} \\ &\quad \{4, 6, 8\}, \{4, 6, 10\}, \{4, 8, 10\}, \{6, 8, 10\}, \\ &\quad \{4, 6, 8, 10\}\}.\end{aligned}$$

Das kartesische Produkt $A \times D$ ist die Menge aller Paare (a, d) mit $a \in A$ und $d \in D$. Es gilt also

$$\begin{aligned}A \times D &= \{3, 4, 5, 6, 7\} \times \{3, 4\} \\ &= \{(3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (7, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (7, 4)\}.\end{aligned}$$

Die Menge $A \setminus B$ besteht aus allen Elementen von A , die nicht in B liegen. Es gilt also

$$A \setminus B = \{3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{3\}.$$

Nun enthält $(A \setminus B) \setminus C$ alle Elemente von $A \setminus B$, die nicht in C liegen. Somit gilt

$$(A \setminus B) \setminus C = \{3\} \setminus \{\pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \dots\} = \{3\}.$$

Analog erhält man

$$B \setminus C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \setminus \{\pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \dots\} = \{5, 7, 9\}$$

und damit

$$A \setminus (B \setminus C) = \{3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{5, 7, 9\} = \{3, 4, 6\}.$$

Wir werden sehen, gilt also nicht (!) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$. Es spielt also eine Rolle, wie wir die Klammern setzen!

(b) Um uns Schreibarbeit zu sparen, setzen wir

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n.$$

Wir behaupten, dass $A = \mathbb{N}$. Um dies zu zeigen, müssen wir gemäß der Vorlesung beweisen, dass $A \subseteq \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \subseteq A$.

Wir zeigen zuerst, dass $A \subseteq \mathbb{N}$. Dazu ist zu zeigen, dass jedes Element von A ein Element von $\mathbb{N}$ ist. Nehmen wir also $a \in A$ an und zeigen $a \in \mathbb{N}$. Wir haben A ja als die Vereinigung der Mengen M_n mit $n \in \mathbb{N}$ definiert und diese Vereinigung enthält alle

Elemente, die in mindestens einer der Mengen M_n , $n \in \mathbb{N}$, liegen. Wegen $a \in A$ gilt also $a \in M_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition von M_n sind die Elemente von M_n natürliche Zahlen. Somit gilt, wie gewünscht, $a \in \mathbb{N}$. Es folgt $A \subseteq \mathbb{N}$.

Wir zeigen nun, dass $\mathbb{N} \subseteq A$. Dazu müssen wir zeigen, dass jedes Element von $\mathbb{N}$ ein Element von A ist. Nehmen wir also eine natürliche Zahl $x \in \mathbb{N}$ und zeigen wir $x \in A$. Nach Definition von M_x gilt $x \in M_x$. Damit liegt x auch in der Vereinigung der Mengen M_n mit $n \in \mathbb{N}$. Also gilt, wie gewünscht, $x \in A$. Es folgt $\mathbb{N} \subseteq A$.

Wir haben unsere Behauptung, dass $A = \mathbb{N}$ gilt, damit bewiesen.

Wir setzen nun

$$B := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n.$$

Wir behaupten, dass $B = \{1\}$. Dazu ist gemäß der Vorlesung zu zeigen, dass $B \subseteq \{1\}$ und $\{1\} \subseteq B$.

Wir begründen zuerst, dass $B \subseteq \{1\}$. Die Menge B enthält alle Elemente, die in jeder der Mengen M_n , $n \in \mathbb{N}$, liegen. Also liegt jedes Element von B auch in $M_1 = \{1\}$.

Wir begründen nun, dass $\{1\} \subseteq B$. Nach Definition liegt 1 in jeder der Mengen M_n mit $n \in \mathbb{N}$. Also gilt auch $1 \in B$ und damit $\{1\} \subseteq B$.

Unsere Behauptung, dass $B = \{1\}$ gilt, haben wir damit bewiesen.

Aufgabe 2

Entscheiden Sie für jede gegebene Aussage, ob sie wahr oder falsch ist. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

- (i) $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1, 1\}$.
- (ii) $\{2, 3, 5\} = (2, 3, 5)$.
- (iii) $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, \{3\}\} = \{1, 2\}$.
- (iv) $\{1, 2\} \cup \{\{2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$.
- (v) $|\emptyset \cup \{1\}| = 2$.

Die Aussage in (i) ist richtig, denn beide Mengen haben dieselben Elemente. Dass die Elemente auf der rechten Seite in einer anderen Reihenfolge vorkommen und dass die 1 doppelt aufgezählt wird, spielt keine Rolle! Es ist nicht wichtig, in welcher Reihenfolge man die Elemente einer Menge angibt und wie oft man die einzelnen Elemente aufzählt.

Die Aussage in (ii) ist falsch, denn links steht eine Menge und rechts steht ein Tupel.

Die Aussage in (iii) ist richtig, denn 1 und 2 sind genau die Elemente, die in beiden Mengen vorkommen, also genau die Elemente der Schnittmenge. Die 3 kommt *nicht* in beiden Mengen vor. In der einen Menge sehen wir zwar $\{3\}$ als ein Element, aber nicht die 3 selbst!

Die Aussage in (iv) ist falsch, denn die Vereinigungsmenge enthält alle Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen liegen. Die 3 ist damit kein Element der Vereinigungsmenge. Wir sehen zwar $\{2, 3\}$ als ein Element der einen Menge, aber nicht die 3 selbst!

Die Aussage in (v) ist falsch, denn die Vereinigung $\emptyset \cup \{1\}$ ist gleich $\{1\}$ und $\{1\}$ hat Kardinalität 1.

Aufgabe 3

Sei M eine Menge. Für jede Teilmenge N von M sei $\overline{N} := M \setminus N$. Seien nun A und B Teilmengen von M . Beweisen Sie die de Morganschen Regeln

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ und} \\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

- Wir beweisen zunächst, dass

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Sei $x \in M$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

Für die dritte Äquivalenz haben wir Lemma 2.1 aus der Vorlesung (De Morgansche Regeln für Aussagen) verwendet.

Ein Element von M liegt also genau dann in $\overline{A \cap B}$, wenn es in $\overline{A} \cup \overline{B}$ liegt. Somit haben $\overline{A \cap B}$ und $\overline{A} \cup \overline{B}$ dieselben Elemente. Es gilt also

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

- Wir zeigen nun, dass

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Sei dazu $x \in M$. Dann gilt

$$\begin{aligned}x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \\&\Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \\&\Leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \\&\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\&\Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \\&\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}.\end{aligned}$$

Für die dritte Äquivalenz haben wir Lemma 2.1 aus der Vorlesung (De Morgansche Regeln für Aussagen) verwendet.

Ein Element von M liegt also genau dann in $\overline{A \cup B}$, wenn es in $\overline{A} \cap \overline{B}$ liegt. Somit haben $\overline{A \cup B}$ und $\overline{A} \cap \overline{B}$ dieselben Elemente. Es gilt also

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Aufgabe 4

Seien A , B und C Mengen. Beweisen Sie die Distributivgesetze

$$\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ und} \\A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C).\end{aligned}$$

- Wir zeigen zuerst, dass

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Gemäß der Vorlesung ist zu zeigen, dass

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

und

$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

” $\subseteq$ ”: Sei $x \in A \cap (B \cup C)$. Dann gilt $x \in A$ und $x \in B \cup C$. Letzteres bedeutet, dass $x \in B$ oder $x \in C$ gilt. Wir betrachten beide Fälle:

1. *Fall*: $x \in B$.

Wie wir oben gesehen haben, gilt $x \in A$. Nach Annahme gilt außerdem $x \in B$. Also liegt x sowohl in A als auch in B . Somit gilt $x \in A \cap B$. Hiermit gilt auch $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. *Fall*: $x \in C$.

Wie im ersten Fall sehen wir, dass $x \in A \cap C$. Hiermit gilt auch $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

In jedem Fall gilt also $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Damit haben wir gezeigt, dass

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

” $\supseteq$ ”: Sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dann liegt x in $A \cap B$ oder in $A \cap C$. Wir betrachten beide Fälle.

1. *Fall*: $x \in A \cap B$.

Dann gilt $x \in A$ und $x \in B$. Mit $x \in B$ gilt auch $x \in B \cup C$. Es gilt also $x \in A$ und $x \in B \cup C$ und damit $x \in A \cap (B \cup C)$.

2. *Fall*: $x \in A \cap C$.

Dann gilt $x \in A$ und $x \in C$. Mit $x \in C$ gilt auch $x \in B \cup C$. Es gilt also $x \in A$ und $x \in B \cup C$ und damit $x \in A \cap (B \cup C)$.

In jedem Fall gilt also $x \in A \cap (B \cup C)$. Damit haben wir gezeigt, dass

$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- Wir zeigen nun, dass

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Dies funktioniert so ähnlich wie der obige Beweis. Trotzdem gehen wir alle Schritte genauso detailliert wie oben durch. Gemäß der Vorlesung ist zu zeigen, dass

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

und

$$A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

” $\subseteq$ ”: Sei $x \in A \cup (B \cap C)$. Dann gilt $x \in A$ oder $x \in B \cap C$. Wir betrachten beide Fälle:

1. *Fall*: $x \in A$.

Mit $x \in A$ gilt auch $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Damit gilt $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. *Fall*: $x \in B \cap C$.

Mit $x \in B \cap C$ gilt $x \in B$ und $x \in C$. Mit $x \in B$ gilt auch $x \in A \cup B$ und mit $x \in C$ gilt auch $x \in A \cup C$. Es folgt $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

In jedem Fall gilt also $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Damit haben wir gezeigt, dass

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

” $\supseteq$: ” Sei $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dann liegt x in $A \cup B$ und in $A \cup C$. Falls x in A liegt, dann liegt x auch in $A \cup (B \cap C)$. Nehmen wir nun an, dass x nicht in A liegt. Wegen $x \in A \cup B$ gilt dann $x \in B$ und wegen $x \in A \cup C$ gilt dann $x \in C$. Somit gilt $x \in B \cap C$. Damit gilt auch $x \in A \cup (B \cap C)$.

In jedem Fall liegt x also in $A \cup (B \cap C)$. Damit haben wir gezeigt, dass

$$A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Aufgabe 5

(i) Drücken Sie die folgenden Aussagen symbolisch aus.

- Das Quadrat jeder natürlichen Zahl ist positiv.
- Es gibt keine größte natürliche Zahl.

(ii) Negieren Sie die folgenden Aussagen.

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2$.

(iii) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

- $\neg(A \wedge (\neg A))$.
- $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$.

(i) Anstatt zu sagen, dass das Quadrat jeder natürlichen Zahl positiv ist, können wir auch sagen, dass $n^2 > 0$ für alle natürlichen Zahlen n gilt. Wie wir wissen, kürzen wir *für alle* mit $\forall$ ab. Wir können also schreiben:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 > 0.$$

Um die Aussage *Es gibt keine größte natürliche Zahl* symbolisch auszudrücken, formulieren wir auch sie zunächst um. Wir können z. B. stattdessen sagen: Für jede natürliche Zahl gibt es eine natürliche Zahl, die noch größer ist. Oder etwas anders: Für alle natürlichen Zahlen n existiert eine natürliche Zahl m , so dass m größer als n ist. Wir kürzen *für alle* mit $\forall$ und *es existiert* mit $\exists$ ab. Unter Verwendung dieser Symbolik können wir unsere Aussage nun wie folgt schreiben:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m > n.$$

- (ii) Seien M eine Menge und $A(x)$ eine Aussageform, wobei wir für x Elemente von M einsetzen können. Wir wissen aus der Vorlesung (und verstehen es auch mit unserer logischen Intuition), dass die Negation der Existenzaussage $\exists x \in M : A(x)$ die Aussage $\forall x \in M : \neg(A(x))$ ist. Damit gilt

$$\neg(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \neg(x^2 = 1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1.$$

Wir wissen auch aus der Vorlesung (und von unserer logischen Intuition), dass die Negation der All-Aussage $\forall x \in M : A(x)$ die Existenzaussage $\exists x \in M : \neg(A(x))$ ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} \neg(\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2) &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \neg(\exists m \in \mathbb{N} : n = m^2) \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : \neg(n = m^2) \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : n \neq m^2. \end{aligned}$$

- (iii) Die folgende Wahrheitstafel zeigt, dass $\neg(A \wedge (\neg A))$ eine Tautologie ist.

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	$\neg(A \wedge \neg A)$
W	F	F	W
F	W	F	W

Die folgende Wahrheitstafel zeigt, dass $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$ eine Tautologie ist.

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge A$	$((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$
W	W	W	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	W

Hausaufgaben

Es sind zwei der folgenden Aufgaben abzugeben. Falls Sie mehr abgeben, kreuzen Sie bitte an, welche der Aufgaben wir bewerten sollen. Bitte laden Sie die Aufgaben bis zum 25.10.2021, 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Gegeben seien die Mengen $A := \{n \in \mathbb{N} \mid n^3 > 8n^2\}$, $B := \{2n \mid n \in \mathbb{N}, |n - 4| \leq 1\}$ und $C := \{z + 10 \mid z \in \mathbb{Z}, z^2 < 9\}$. Berechnen Sie die Mengen

$$(A \cap B) \times (B \cap C) \text{ und } \mathcal{P}((A \cap B) \times (B \cap C)).$$

Wir geben zunächst die Mengen A , B und C in aufzählender Schreibweise an. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n^3 > 8n^2 \Leftrightarrow \frac{n^3}{n^2} > \frac{8n^2}{n^2} \Leftrightarrow n > 8.$$

Es folgt

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 8\} = \{9, 10, 11, 12, 13, \dots\}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $|n - 4| \leq 1$ genau dann, wenn $3 \leq n \leq 5$. Damit gilt

$$B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, 3 \leq n \leq 5\} = \{6, 8, 10\}.$$

Für $z \in \mathbb{Z}$ gilt $z^2 < 9$ genau dann, wenn $-2 \leq z \leq 2$. Es gilt also

$$C = \{z + 10 \mid z \in \mathbb{Z}, -2 \leq z \leq 2\} = \{8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Die Schnittmenge $A \cap B$ enthält alle Elemente, die sowohl in A als auch in B liegen. Es gilt also

$$A \cap B = \{9, 10, 11, 12, 13, \dots\} \cap \{6, 8, 10\} = \{10\}.$$

Die Schnittmenge $B \cap C$ enthält alle Elemente, die sowohl in B als auch in C liegen. Es gilt also

$$B \cap C = \{6, 8, 10\} \cap \{8, 9, 10, 11, 12\} = \{8, 10\}.$$

Nun besteht das kartesische Produkt $(A \cap B) \times (B \cap C)$ aus allen Paaren (x, y) mit $x \in A \cap B$ und $y \in B \cap C$. Es gilt also

$$(A \cap B) \times (B \cap C) = \{10\} \times \{8, 10\} = \{(10, 8), (10, 10)\}.$$

Die Potenzmenge $\mathcal{P}((A \cap B) \times (B \cap C))$ ist die Menge aller Teilmengen von $(A \cap B) \times (B \cap C)$. Hierbei dürfen wir nicht die leere Menge vergessen! Es gilt also

$$\mathcal{P}((A \cap B) \times (B \cap C)) = \mathcal{P}(\{(10, 8), (10, 10)\}) = \{\emptyset, \{(10, 8)\}, \{(10, 10)\}, \{(10, 8), (10, 10)\}\}.$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Sei M eine Menge. Von den folgenden Aussagen beschreiben einige denselben Sachverhalt. Geben Sie mit kurzer Begründung an, welche das sind.

- (1) $\{x\} \in M$, (2) $\{x\} \subseteq M$, (3) $x \in M$
(4) $M \setminus \{x\} \neq \emptyset$, (5) $\{x\} \setminus M = \emptyset$, (6) $\{x\} \cap M \neq \emptyset$

Wir behaupten, dass die Aussagen in (2), (3), (5) und (6) alle denselben Sachverhalt beschreiben. Dazu begründen wir, dass jede der Aussagen in (2), (5) und (6) äquivalent ist zu der Aussage in (3).

Schauen wir uns zunächst die Aussage in (2) an, also $\{x\} \subseteq M$. Dies ist genau dann der Fall, wenn jedes Element von $\{x\}$ ein Element von M ist. Und das gilt genau dann, wenn x ein Element von M ist, also wenn $x \in M$.

Schauen wir uns nun die Aussage in (5) an, also $\{x\} \setminus M = \emptyset$. Die Menge $\{x\} \setminus M$ besteht aus allen Elementen von $\{x\}$, die nicht in M liegen.

Wenn diese Menge leer ist, wenn also $\{x\} \setminus M = \emptyset$ gilt, gibt es keine Elemente von $\{x\}$, die nicht in M liegen. Also liegen alle Elemente von $\{x\}$ in M bzw. gilt $x \in M$.

Gilt umgekehrt $x \in M$, so gilt $\{x\} \setminus M = \emptyset$.

Die Aussage in (5) ist damit äquivalent zu der Aussage in (3).

Werfen wir nun einen Blick auf die Aussage in (6). Es gilt $\{x\} \cap M \neq \emptyset$ genau dann, wenn die Mengen $\{x\}$ und M ein gemeinsames Element besitzen. Da x das einzige Element von $\{x\}$ ist, ist dies genau dann der Fall, wenn $x \in M$ gilt. Somit sind die Aussagen in (3) und (6) äquivalent.

Die Aussagen in (1) und (4) sind nicht äquivalent zu der Aussage in (3). Für $M = \{1\}$ und $x = 1$ gilt z. B. $x \in M$ (also die Aussage in (3)), aber nicht $\{x\} \in M$, was die Aussage in (1) ist. Ebenso gilt $M \setminus \{x\} = \emptyset$, womit die Aussage in (3), nicht aber die in (4), erfüllt ist.

Aufgabe 8 (5 Punkte)

- (i) Geben Sie Beispiele für Mengen A, B, C, D an, für welche die Gleichung

$$(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (A \cup C) \setminus (B \cup D)$$

verletzt ist.

- (ii) Beweisen Sie, dass die Inklusion $(A \cup C) \setminus (B \cup D) \subseteq (A \setminus B) \cup (C \setminus D)$ für alle Mengen A, B, C, D richtig ist.

- (i) Setze $A := \{1\}$, $B := \{2\}$, $C := \{1\}$ und $D := \{1, 2\}$. Dann gilt

$$(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (\{1\} \setminus \{2\}) \cup (\{1\} \setminus \{1, 2\}) = \{1\} \cup \emptyset = \{1\}$$

und

$$(A \cup C) \setminus (B \cup D) = (\{1\} \cup \{1\}) \setminus (\{2\} \cup \{1, 2\}) = \{1\} \setminus \{1, 2\} = \emptyset.$$

Also gilt $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) \neq (A \cup C) \setminus (B \cup D)$.

Hinweis: Wie findet man am besten ein solches Beispiel? Natürlich könnte man einfach irgendwelche Mengen ausprobieren, aber das dauert mitunter lange und ist kein besonders schlaues Vorgehen. Besser ist es, sich zunächst auf einer anschaulichen Ebene zu überlegen, warum die gegebene Gleichung im Allgemeinen nicht stimmen kann. Stellen wir uns etwa vor, ein Busunternehmen bietet vier Städtereisen an: eine nach Aachen,

eine nach Berlin, eine nach Chemnitz und eine nach Dresden. Sei A die Menge der nach Aachen reisenden Personen, B die Menge der nach Berlin reisenden Personen, C die Menge der nach Chemnitz reisenden Personen und D die Menge der nach Dresden reisenden Personen. Stellen wir uns nun vor, jemand nimmt an den Reisen nach Aachen, Chemnitz und Dresden teil, aber nicht an der Reise nach Berlin. Dann ist diese Person ein Element der Menge $(A \setminus B) \cup (C \setminus D)$, aber kein Element der Menge $(A \cup C) \setminus (B \cup D)$. Wenn wir uns nun vorstellen, dass das Busunternehmen nur zwei Kunden hat (nummeriert mit 1 und 2) und dass die mit 1 nummerierte Person diejenige ist, die alle Reisen bis auf die Berlinreise mitmacht, gelangen wir zu der oben getroffenen Wahl der Mengen A , B , C und D (oder zu einer anderen Wahl, für die die angegebene Gleichung nicht stimmt).

(ii) Um zu zeigen, dass

$$(A \cup C) \setminus (B \cup D) \subseteq (A \setminus B) \cup (C \setminus D)$$

gilt, müssen wir zeigen, dass jedes Element von $(A \cup C) \setminus (B \cup D)$ auch ein Element von $(A \setminus B) \cup (C \setminus D)$ ist. Sei also $x \in (A \cup C) \setminus (B \cup D)$. Dann liegt x in $A \cup C$, aber nicht in $B \cup D$. Wegen $x \in A \cup C$ gilt $x \in A$ oder $x \in C$. Wir betrachten beide Fälle.

1. *Fall:* $x \in A$.

Da x nicht in $B \cup D$ liegt, liegt x weder in B noch in D . Es gilt also $x \in A \setminus B$ und damit auch $x \in (A \setminus B) \cup (C \setminus D)$.

2. *Fall:* $x \in C$.

Wie im 1. Fall sehen wir, dass $x \in C \setminus D$ gilt. Also gilt auch $x \in (A \setminus B) \cup (C \setminus D)$.

In beiden Fällen gilt nun $x \in (A \setminus B) \cup (C \setminus D)$. Es folgt

$$(A \cup C) \setminus (B \cup D) \subseteq (A \setminus B) \cup (C \setminus D).$$

Aufgabe 9 (5 Punkte)

(i) Drücken Sie die folgenden Aussagen in Worten aus.

- $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq n^2$.
- $\forall n \in \mathbb{N} \exists q \in \mathbb{Q} : n < q < n + 1$.

(ii) Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um eine Tautologie handelt.

- $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow \neg A$.
- $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A)) \Rightarrow \neg B$.

- (i) Wir erinnern uns, dass $\forall$ die Bedeutung *für alle* und $\exists$ die Bedeutung *es existiert* hat.

Die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq n^2$ ist damit zu lesen als: Für alle natürlichen Zahlen n gilt, dass $n \leq n^2$. Oder rein verbal: Jede natürliche Zahl ist höchstens so groß wie ihr Quadrat.

Die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} \exists q \in \mathbb{Q} : n < q < n + 1$ ist wie folgt zu lesen: Für alle natürlichen Zahlen n gilt, dass eine rationale Zahl q existiert mit $n < q < n + 1$. Rein verbal lässt sich dies wie folgt ausdrücken: Zwischen einer natürlichen Zahl und ihrem Nachfolger liegt stets eine rationale Zahl.

- (ii) Die folgende Wahrheitstafel zeigt, dass $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow \neg A$ eine Tautologie ist.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)$	$((A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow \neg A$
W	W	F	F	W	F	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	F	W
F	F	W	W	W	W	W

Hingegen ist $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A)) \Rightarrow \neg B$ keine Tautologie. Um dies zu sehen, betrachten wir den Fall, dass A den Wahrheitswert *Falsch* und B den Wahrheitswert *Wahr* hat. Dann ist $A \Rightarrow B$ wahr und $\neg A$ ebenfalls wahr. Damit ist auch $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A))$ wahr. Hingegen ist $\neg B$ falsch, da B wahr ist. Somit ist $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A)) \Rightarrow \neg B$ falsch.

Dies kann man sich auch an einem anschaulichen Beispiel klarmachen: Nehmen wir an, A ist die Aussage *Es regnet* und B ist die Aussage *Es sind Regenwolken am Himmel*. Dann ist $A \Rightarrow B$ die Aussage *Wenn es regnet, dann sind Regenwolken am Himmel* (das ist wahr, denn Regen kommt aus Regenwolken). Bei $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A)) \Rightarrow \neg B$ handelt es sich nun um die Aussage *Wenn bei jedem Regen Regenwolken am Himmel sind und es nicht regnet, dann sind keine Regenwolken am Himmel*. Das ist natürlich Blödsinn, denn es können auch Regenwolken am Himmel sein, ohne dass es regnet.