

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der zehnten Übung. Der späteste Abgabetermin ist der 06.01. um 16:40 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem zehnten Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 10* finden.

Lösung der ersten Vorbereitungsaufgabe

In der ersten Vorbereitungsaufgabe waren zwei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$$

und

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

gegeben. Welche Matrizen Sie konkret zu sehen bekamen, also welche Werte $a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12}, b_{21}$ und b_{22} hatten, war vom Zufall abhängig. Die Aufgabe bestand darin, das Produkt AB zu berechnen. Und das wird so gemacht wie im Skript auf S. 49 beschrieben. Es gilt also

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Beispielsweise gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Lösung der zweiten Vorbereitungsaufgabe

Die Frage war, ob die Abbildung

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 5y \end{pmatrix}$$

linear ist.

Sie ist linear. Denn:

- Seien $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) &= \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2(x + x') \\ 5(y + y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x + 2x' \\ 5y + 5y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x \\ 5y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x' \\ 5y' \end{pmatrix} \\ &= \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

- Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi_1 \left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2(\lambda x) \\ 5(\lambda y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2\lambda)x \\ (5\lambda)y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda 2)x \\ (\lambda 5)y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(2x) \\ \lambda(5y) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 5y \end{pmatrix} \\ &= \lambda \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

Lösung der dritten Vorbereitungsaufgabe

Die Frage war, ob die Abbildung

$$\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + y$$

linear ist.

Sie ist linear. Denn:

- Seien $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi_2 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) &= \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \right) \\ &= (x + x') + (y + y') \\ &= (x + y) + (x' + y') \\ &= \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

- Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi_2 \left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \right) \\ &= \lambda x + \lambda y \\ &= \lambda(x + y) \\ &= \lambda \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

Lösung der vierten Vorbereitungsaufgabe

Die Frage war, ob die Abbildung

$$\varphi_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x + 1$$

linear ist.

Sie ist nicht linear, denn es gilt

$$\varphi_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \varphi_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 2 = 1 + 1 = \varphi_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \varphi_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Kürzer können wir das auch unter Verwendung von Lemma 6.11 (a) begründen. Wäre nämlich φ_3 linear, so würde nach dem genannten Lemma $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf 0 abgebildet werden. Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf 1 abgebildet wird, kann φ_3 also nicht linear sein.

Lösung der fünften Vorbereitungsaufgabe

Die Aufgabenstellung lautete wie folgt:

Seien U und V Vektorräume über einem Körper K und sei $\varphi : U \rightarrow V$ ein Isomorphismus (im Sinne von Definition 6.12). Wir wollen beweisen, dass die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ ebenfalls ein Isomorphismus ist. Wir wollen also Lemma 6.16 (c) beweisen. Unten ist ein Beweis angegeben, allerdings nicht in der richtigen Reihenfolge. Ordnen Sie den Beweis so an, dass man ihn von oben nach unten in der richtigen Reihenfolge lesen kann.

Gegeben und anzuordnen waren dann die folgenden Teile des Beweises, die wir im Folgenden schon in der richtigen Reihenfolge angeben.

1. Um zu zeigen, dass φ^{-1} ein Isomorphismus ist, müssen wir zeigen, dass φ^{-1} linear und bijektiv ist. Wegen Lemma 1.12 (b) ist φ^{-1} bijektiv.
2. Zu zeigen bleibt also nur noch, dass φ^{-1} linear ist. Um die Linearität von φ^{-1} zu beweisen, müssen wir nachweisen, dass

$$(1) \quad \varphi^{-1}(v_1 + v_2) = \varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2) \text{ für alle } v_1, v_2 \in V,$$

$$(2) \quad \varphi^{-1}(\lambda v) = \lambda \varphi^{-1}(v) \text{ für alle } v \in V \text{ und } \lambda \in K.$$

Wir weisen zuerst (1) und dann (2) nach.

3. Seien also $v_1, v_2 \in V$. Setze $u_1 := \varphi^{-1}(v_1)$ und $u_2 := \varphi^{-1}(v_2)$.
4. Dann gilt $\varphi(u_1) = \varphi(\varphi^{-1}(v_1)) = v_1$ und $\varphi(u_2) = \varphi(\varphi^{-1}(v_2)) = v_2$. Wegen der Linearität von φ gilt $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$.
5. Es folgt

$$\varphi^{-1}(v_1 + v_2) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1 + u_2)) = u_1 + u_2 = \varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2).$$

6. Damit ist (1) bewiesen.
7. Sei nun $v \in V$ und $\lambda \in K$. Setze $u := \varphi^{-1}(v)$. Dann gilt $\varphi(u) = \varphi(\varphi^{-1}(v)) = v$. Wegen der Linearität von φ gilt $\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$.
8. Es folgt $\varphi^{-1}(\lambda v) = \varphi^{-1}(\lambda \varphi(u)) = \varphi^{-1}(\varphi(\lambda u)) = \lambda u = \lambda \varphi^{-1}(v)$. Damit ist (2) bewiesen. Der Beweis ist also abgeschlossen.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Gegeben sind die folgenden Matrizen mit Einträgen aus dem Körper $\mathbb{Z}/5$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der Produkte XY mit $X, Y \in \{A, B, C\}$ sind definiert? Berechnen Sie alle Produkte, die definiert sind. Geben Sie dabei alle Matrixeinträge in der Form k mit $0 \leq k \leq 4$ an.

Lösung

Für $X, Y \in \{A, B, C\}$ ist das Produkt XY genau dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von X mit der Anzahl der Zeilen von Y übereinstimmt (vgl. S. 49 im Skript). Folglich sind die Produkte AB , AC , BB und BC (und nur diese) definiert. Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(denn $1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 6 = 1$ und $1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 13 = 3$ in $\mathbb{Z}/5$),

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(denn $1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 9 = 4$ und $1 \cdot 0 + 4 \cdot 4 = 16 = 1$ und $1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 6 = 1$ in $\mathbb{Z}/5$),

$$BB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(denn $2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5 = 0$ und $1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 10 = 0$ in $\mathbb{Z}/5$),

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(denn $2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5 = 0$ und $1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 7 = 2$ und $1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12 = 2$ und $1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5 = 0$ in $\mathbb{Z}/5$).

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und seien

$$D_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0_K \\ 0_K & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in K \setminus \{0_K\} \right\}$$

und

$$D_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0_K \\ 0_K & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in K \right\}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass D_1 zusammen mit der üblichen Multiplikation von Matrizen eine abelsche Gruppe ist.
- (ii) Ist auch D_2 zusammen mit der üblichen Multiplikation von Matrizen eine Gruppe?

Lösung

- (i) Seien $A := \begin{pmatrix} \lambda & 0_K \\ 0_K & \mu \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} \lambda' & 0_K \\ 0_K & \mu' \end{pmatrix} \in D_1$. Dann gilt $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in K \setminus \{0_K\}$. Nach Lemma 2.23 gilt also $\lambda\lambda' \in K \setminus \{0_K\}$ und $\mu\mu' \in K \setminus \{0_K\}$. Wir berechnen

$$AB = \begin{pmatrix} \lambda & 0_K \\ 0_K & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda' & 0_K \\ 0_K & \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\lambda' + 0_K 0_K & \lambda 0_K + 0_K \mu' \\ 0_K \lambda' + \mu 0_K & 0_K 0_K + \mu \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\lambda' & 0_K \\ 0_K & \mu\mu' \end{pmatrix}. \quad (\star)$$

Für die dritte Gleichheit haben wir Lemma 2.19 verwendet. Wegen $\lambda\lambda' \in K \setminus \{0_K\}$ und $\mu\mu' \in K \setminus \{0_K\}$ folgt $AB \in D_1$. Da A und B beliebig gewählte Elemente von D_1 waren, folgt, dass das Produkt je zweier Matrizen aus D_1 wieder in D_1 liegt.

Somit ist durch

$$D_1 \times D_1 \rightarrow D_1, (X, Y) \mapsto XY$$

eine binäre Operation auf D_1 gegeben. Wir zeigen nun, dass diese binäre Operation die Gruppenaxiome (1), (2) und (3) aus Definition 2.1 erfüllt.

(1) Assoziativität

Nach Lemma 5.4 gilt $(XY)Z = X(YZ)$ für alle $X, Y, Z \in D_1$.

Alternativ lässt sich dies auch direkt nachrechnen, ohne Lemma 5.4 zu verwenden.

Für Elemente $X := \begin{pmatrix} \lambda & 0_K \\ 0_K & \mu \end{pmatrix}, Y := \begin{pmatrix} \lambda' & 0_K \\ 0_K & \mu' \end{pmatrix}$ und $Z := \begin{pmatrix} \lambda'' & 0_K \\ 0_K & \mu'' \end{pmatrix}$ von D_1 gilt nämlich

$$\begin{aligned} (XY)Z &\stackrel{(\star)}{=} \begin{pmatrix} \lambda\lambda' & 0_K \\ 0_K & \mu\mu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'' & 0_K \\ 0_K & \mu'' \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(\star)}{=} \begin{pmatrix} (\lambda\lambda')\lambda'' & 0_K \\ 0_K & (\mu\mu')\mu'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(\lambda'\lambda'') & 0_K \\ 0_K & \mu(\mu'\mu'') \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(\star)}{=} \begin{pmatrix} \lambda & 0_K \\ 0_K & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'\lambda'' & 0_K \\ 0_K & \mu'\mu'' \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(\star)}{=} X(YZ). \end{aligned}$$

Für die dritte Gleichheit haben wir die Assoziativität der Multiplikation in K verwendet.

(2) Existenz eines neutralen Elements

Gemäß Definition 2.15 (iii) gilt $1_K \in K \setminus \{0_K\}$. Somit gilt

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1_K & 0_K \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \in D_1.$$

Nach Lemma 5.6 gilt außerdem $X \cdot I_2 = X = I_2 \cdot X$ für alle $X \in D_1$.

(3) Existenz von Inversen

Sei $\begin{pmatrix} \lambda & 0_K \\ 0_K & \mu \end{pmatrix} \in D_1$. Dann gilt $\lambda, \mu \in K \setminus \{0_K\}$. Nach Korollar 2.20 gilt $\lambda^{-1} \neq 0_K \neq \mu^{-1}$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0_K \\ 0_K & \mu^{-1} \end{pmatrix} \in D_1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 0_K \\ 0_K & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0_K \\ 0_K & \mu^{-1} \end{pmatrix} &\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} \lambda\lambda^{-1} & 0_K \\ 0_K & \mu\mu^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_K & 0_K \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{-1}\lambda & 0_K \\ 0_K & \mu^{-1}\mu \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0_K \\ 0_K & \mu^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0_K \\ 0_K & \mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dass (1), (2) und (3) erfüllt sind, bedeutet, dass D_1 zusammen mit der gewöhnlichen Multiplikation von Matrizen eine Gruppe ist. Zu zeigen bleibt, dass es sich um eine abelsche Gruppe handelt. Seien dazu $A := \begin{pmatrix} \lambda & 0_K \\ 0_K & \mu \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} \lambda' & 0_K \\ 0_K & \mu' \end{pmatrix} \in D_1$. Dann gilt

$$AB \stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} \lambda\lambda' & 0_K \\ 0_K & \mu\mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda'\lambda & 0_K \\ 0_K & \mu'\mu \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{=} BA.$$

Für die zweite Gleichheit haben wir die Kommutativität der Multiplikation in K verwendet.

- (ii) Nach Definition von D_2 gilt $I_2 = \begin{pmatrix} 1_K & 0_K \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \in D_2$. Nach Lemma 5.6 gilt $X \cdot I_2 = X = I_2 \cdot X$ für alle $X \in D_2$. Wenn D_2 mit der gewöhnlichen Multiplikation von Matrizen eine Gruppe wäre, so müsste I_2 also das neutrale Element dieser Gruppe sein (dies folgt aus Fußnote 11 auf S. 16). Für jedes $X \in D_2$ müsste es dann aber ein $Y \in D_2$ mit $XY = I_2 = YX$ geben. Das ist aber nicht der Fall, denn z. B. ist die Nullmatrix $O_{2,2}$ ein Element von D_2 , aber es gilt $O_{2,2} \cdot Y = O_{2,2} \neq I_2$ für alle $Y \in D_2$. Somit ist D_2 zusammen mit der gewöhnlichen Multiplikation von Matrizen keine Gruppe.

Aufgabe 4

Prüfen Sie jeweils, ob es sich um eine lineare Abbildung handelt. Falls dies der Fall ist, entscheiden Sie, welche der Begriffe aus Definition 6.12 auf die jeweilige Abbildung zutreffen.

$$(i) \quad \varphi_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3y \\ z + 2x \end{pmatrix}.$$

$$(ii) \quad \varphi_b : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3y \\ z + 1 \end{pmatrix}.$$

$$(iii) \quad \varphi_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 3x + 4y.$$

Lösung

(i) Die Abbildung φ_a ist linear. Denn:

- Seien $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi_a \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) &= \varphi_a \left(\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} (x + x') - 3(y + y') \\ (z + z') + 2(x + x') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x - 3y) + (x' - 3y') \\ (z + 2x) + (z' + 2x') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x - 3y \\ z + 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' - 3y' \\ z' + 2x' \end{pmatrix} \\ &= \varphi_a \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) + \varphi_a \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

- Für $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi_a \left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= \varphi_a \left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x - 3\lambda y \\ \lambda z + 2\lambda x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x - 3y) \\ \lambda(z + 2x) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x - 3y \\ z + 2x \end{pmatrix} \\ &= \lambda \varphi_a \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Die Abbildung φ_a ist nicht injektiv, denn es gilt z. B.

$$\varphi_a \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi_a \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right).$$

Die Abbildung φ_a ist allerdings surjektiv: Sei $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Setze $x := 1$, $y := \frac{1}{3}(1 - r)$ und $z := s - 2$. Dann gilt

$$\varphi_a \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \varphi_a \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3}(1 - r) \\ s - 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 - 3 \cdot \frac{1}{3}(1 - r) \\ (s - 2) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}.$$

Damit ist φ_a kein Monomorphismus (und damit auch kein Isomorphismus), aber ein Epimorphismus. Auch ist φ_a weder ein Endomorphismus noch ein Automorphismus.

(ii) Es gilt

$$\varphi_b \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen Lemma 6.11 (a) kann φ_b also nicht linear sein.

(iii) Die Abbildung φ_c ist linear. Denn:

- Seien $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi_c \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) &= \varphi_c \left(\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \right) \\ &= 3(x+x') + 4(y+y') \\ &= 3x + 3x' + 4y + 4y' \\ &= (3x + 4y) + (3x' + 4y') \\ &= \varphi_c \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \varphi_c \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

- Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi_c \left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \varphi_c \left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \right) \\ &= 3\lambda x + 4\lambda y \\ &= \lambda(3x + 4y) \\ &= \lambda \varphi_c \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

Die Abbildung φ_c ist nicht injektiv, denn z. B. gilt

$$\varphi_c \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 3 = \varphi_c \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \right).$$

Allerdings ist φ_c surjektiv: Sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\varphi_c \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4}(r-3) \end{pmatrix} \right) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{4}(r-3) = 3 + (r-3) = r.$$

Damit ist φ_c ein Epimorphismus, aber weder ein Monomorphismus, noch ein Isomorphismus, noch ein Endomorphismus, noch ein Automorphismus.

Aufgabe 5

Sei K ein Körper und seien $m, n, l \in \mathbb{N}$.

- Zeigen Sie, dass $(AB)^t = B^t A^t$ für alle $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ und $B \in \mathcal{M}_{n \times l}(K)$.
- Zeigen Sie, dass $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$ für alle $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$.
- Zeigen Sie, dass $A(B+C) = AB+AC$ für alle $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ und alle $B, C \in \mathcal{M}_{n \times l}(K)$.

Bemerkung: Man kann analog zeigen, dass $(B+C)A = BA+CA$ für alle $B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ und $A \in \mathcal{M}_{n \times l}(K)$.

Lösung

- (i) Seien $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ und $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times l}(K)$. Schreibe außerdem $A^t = (c_{ij})$ und $B^t = (d_{ij})$. Nach Definition von A^t ist A^t eine $n \times m$ -Matrix und es gilt $c_{ij} = a_{ji}$ für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$. Ebenso ist B^t eine $l \times n$ -Matrix und es gilt $d_{ij} = b_{ji}$ für $1 \leq i \leq l$ und $1 \leq j \leq n$.

Es ist AB die $m \times l$ -Matrix, deren (i, j) -Eintrag für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq l$ durch

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

gegeben ist.

Schreibe nun $(AB)^t = (e_{ij})$ und $B^t A^t = (f_{ij})$. Es ist sowohl $(AB)^t$ als auch $B^t A^t$ eine $(l \times m)$ -Matrix. Um $(AB)^t = B^t A^t$ zu beweisen, zeigen wir, dass $e_{ij} = f_{ij}$ für alle $1 \leq i \leq l$ und alle $1 \leq j \leq m$.

Für $1 \leq i \leq l$ und $1 \leq j \leq m$ stimmt e_{ij} mit dem (j, i) -Eintrag von AB überein. Für $1 \leq i \leq l$ und $1 \leq j \leq m$ gilt also

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}.$$

Für $1 \leq i \leq l$ und $1 \leq j \leq m$ ist f_{ij} der (i, j) -Eintrag von $B^t A^t$, also

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^n d_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}.$$

Damit gilt $e_{ij} = f_{ij}$ für alle $1 \leq i \leq l$ und $1 \leq j \leq m$.

- (ii) Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Elemente von $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$. Schreibe $AB = (c_{ij})$ und $BA = (d_{ij})$. Für $1 \leq i \leq n$ gilt

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}.$$

Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$d_{kk} = \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik}.$$

Es ist $\text{Spur}(AB)$ die Summe aller Diagonaleinträge von AB und es ist $\text{Spur}(BA)$ die

Summe aller Diagonaleinträge von BA . Deshalb gilt

$$\begin{aligned}\text{Spur}(AB) &= \sum_{i=1}^n c_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^n d_{kk} \\ &= \text{Spur}(BA).\end{aligned}$$

(iii) Seien $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times l}(K)$ und $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times l}(K)$.

Für $1 \leq s \leq n$ und $1 \leq j \leq l$ ist der (s, j) -Eintrag von $B + C$ gegeben durch $b_{sj} + c_{sj}$.

Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq l$ ist der (i, j) -Eintrag von $A(B + C)$ also gegeben durch

$$\sum_{s=1}^n a_{is}(b_{sj} + c_{sj}) = \sum_{s=1}^n (a_{is}b_{sj} + a_{is}c_{sj}) = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj} + \sum_{s=1}^n a_{is}c_{sj}.$$

Da für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq l$ der (i, j) -Eintrag von AB durch $\sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj}$ und der (i, j) -Eintrag von AC durch $\sum_{s=1}^n a_{is}c_{sj}$ gegeben ist, ist der (i, j) -Eintrag von $AB + AC$ durch $\sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj} + \sum_{s=1}^n a_{is}c_{sj}$ gegeben. Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq l$ stimmt also der (i, j) -Eintrag von $A(B + C)$ mit dem (i, j) -Eintrag von $AB + AC$ überein. Da sowohl $A(B + C)$ als auch $AB + AC$ eine $m \times l$ -Matrix ist, folgt $A(B + C) = AB + AC$.

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 12.01., 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Gegeben sind die folgenden Matrizen mit Einträgen aus dem Körper $\mathbb{Z}/3$.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Welche der Produkte AA , AB , BA und BB sind definiert? Berechnen Sie alle definierten Produkte. Geben Sie dabei alle Matrixeinträge in der Form k mit $0 \leq k \leq 2$ an.

Lösung

Für $X, Y \in \{A, B\}$ ist das Produkt XY genau dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von X mit der Anzahl der Zeilen von Y übereinstimmt (vgl. S. 49 im Skript). Folglich sind die Produkte AB und BB definiert, während AA und BA nicht definiert sind. Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(denn $2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6 = 0$ und $2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4 = 1$ in $\mathbb{Z}/3$) und

$$BB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(denn $2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 4 = 1$ und $1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4 = 1$ und $1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4 = 1$ in $\mathbb{Z}/3$).

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1_K & a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} : a \in K \right\}.$$

Zeigen Sie, dass H zusammen mit der üblichen Multiplikation von Matrizen eine abelsche Gruppe ist.

Lösung

Seien $A := \begin{pmatrix} 1_K & a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1_K & b \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \in H$. Wir berechnen

$$AB = \begin{pmatrix} 1_K & a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1_K & b \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_K 1_K + a 0_K & 1_K b + a 1_K \\ 0_K 1_K + 1_K 0_K & 0_K b + 1_K 1_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_K & a + b \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix}. \quad (\star)$$

Für die dritte Gleichheit haben wir Lemma 2.19 und die Kommutativität der Addition in K verwendet. Es folgt $AB \in H$. Da A und B beliebig gewählte Elemente von H waren, folgt, dass das Produkt je zweier Matrizen aus H wieder in H liegt.

Somit ist durch

$$H \times H \rightarrow H, (X, Y) \mapsto XY$$

eine binäre Operation auf H gegeben. Wir zeigen nun, dass diese binäre Operation die Gruppenaxiome (1), (2) und (3) aus Definition 2.1 erfüllt.

(1) Assoziativität

Nach Lemma 5.4 gilt $(XY)Z = X(YZ)$ für alle $X, Y, Z \in H$.

Alternativ lässt sich dies auch direkt nachrechnen, ohne Lemma 5.4 zu verwenden. Für Elemente $X := \begin{pmatrix} 1_K & a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix}$, $Y := \begin{pmatrix} 1_K & b \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix}$ und $Z := \begin{pmatrix} 1_K & c \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix}$ von H gilt nämlich

$$\begin{aligned} (XY)Z &\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1_K & a+b \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_K & c \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1_K & (a+b)+c \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_K & a+(b+c) \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1_K & a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_K & b+c \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(*)}{=} X(YZ). \end{aligned}$$

Für die dritte Gleichheit haben wir die Assoziativität der Addition in K verwendet.

(2) Existenz eines neutralen Elements

Es gilt

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1_K & 0_K \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \in H.$$

Nach Lemma 5.6 gilt außerdem $X \cdot I_2 = X = I_2 \cdot X$ für alle $X \in H$.

(3) Existenz von Inversen

Sei $\begin{pmatrix} 1_K & a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \in H$. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1_K & -a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \in H$$

und

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1_K & a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1_K & -a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} &\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1_K & a+(-a) \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_K & 0_K \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_K & (-a)+a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1_K & -a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1_K & a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dass (1), (2) und (3) erfüllt sind, bedeutet, dass H zusammen mit der gewöhnlichen Multiplikation von Matrizen eine Gruppe ist. Zu zeigen bleibt, dass es sich um eine abelsche Gruppe handelt. Seien dazu $A := \begin{pmatrix} 1_K & a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1_K & b \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \in H$. Dann gilt

$$AB \stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1_K & a+b \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_K & b+a \\ 0_K & 1_K \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{=} BA.$$

Für die zweite Gleichheit haben wir die Kommutativität der Addition in K verwendet.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

ein Automorphismus ist.

2. Ist die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}$$

ebenfalls linear?

Lösung

1. Gemäß Definition 6.12 ist ein Automorphismus von $\mathbb{R}^2$ eine bijektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Wir müssen also zeigen, dass φ linear und bijektiv ist. Zuerst zeigen wir die Linearität:

- Seien $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) &= \varphi \left(\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} (x+x') + (y+y') \\ y+y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x+y) + (x'+y') \\ y+y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \varphi \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

- Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x + \lambda y \\ \lambda y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x + y) \\ \lambda y \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix} \\ &= \lambda \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt, dass φ bijektiv, also injektiv und surjektiv, ist.

Injektivität: Seien $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right).$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + y' \\ y' \end{pmatrix}$$

und somit $x + y = x' + y'$ und $y = y'$. Aus der ersten Gleichung folgt $y - y' = x' - x$. Wegen $y = y'$ gilt aber $y - y' = 0$ und es folgt $0 = x' - x$, was $x = x'$ impliziert. Somit gilt $x = x'$ und $y = y'$, also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Surjektivität: Sei $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Setze $x := r - s$ und $y := s$. Dann gilt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} r - s \\ s \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (r - s) + s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}.$$

2. Die Abbildung ψ ist nicht linear, denn z. B. gilt

$$\psi\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \psi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\psi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Zusatzaufgaben

Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgabe wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung zu präsentieren.

Aufgabe 9

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Eine Teilmenge $I \subseteq R$ heißt *Ideal*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. I ist eine Untergruppe von $(R, +)$,
2. für alle $r \in R$ und $a \in I$ gilt $ra \in I$ und $ar \in I$.

Es lässt sich leicht einsehen, dass $\{0_R\}$ und R Ideale sind. Der Ring $(R, +, \cdot)$ heißt *einfach*, falls es keine weiteren Ideale gibt, also falls $\{0_R\}$ und R seine einzigen Ideale sind.

Sei nun K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 5.7 ist $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen ein Ring. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ einfach ist.

Lösung

Angenommen, $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ hat ein Ideal I , welches von $\{O_{n \times n}\}$ und $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ verschieden ist. Da I von $\{O_{n \times n}\}$ verschieden ist, gibt es ein $A = (a_{ij}) \in I$ mit $A \neq O_{n \times n}$. Für $1 \leq i, j \leq n$ sei E_{ij} die Matrix aus $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ mit lauter Nullen außer einer Eins an der Stelle (i, j) .

Sei $1 \leq i, j, r \leq n$. Dann lässt sich nachrechnen, dass

$$a_{ij}E_{rr} = E_{ri}AE_{jr}.$$

Wegen $A \neq O_{n \times n}$ existieren $1 \leq i, j \leq n$ mit $a_{ij} \neq 0$. Für $1 \leq r \leq n$ gilt nun

$$E_{rr} = a_{ij}^{-1}E_{ri}AE_{jr} \in I.$$

Es folgt

$$I_n = \sum_{r=1}^n E_{rr} \in I.$$

Für $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ gilt nun $M = M \cdot I_n \in I$ und somit $I = \mathcal{M}_{n \times n}(K)$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von I .