

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der elften Übung. Der späteste Abgabetermin ist der 13.01 um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem elften Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 11* finden.

Lösung der ersten Vorbereitungsaufgabe

Die erste Vorbereitungsaufgabe lautete wie folgt:

Gegeben ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x \end{pmatrix}$$

Man kann leicht zeigen, dass f linear ist. Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Matrix $\text{Mat}(f, \mathcal{E})$.

Lösung:

Sei $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$. Es gilt

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_2, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1,$$

sodass $\text{Mat}(f, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung der zweiten Vorbereitungsaufgabe

Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K . In der zweiten Vorbereitungsaufgabe waren die richtigen der folgenden Aussagen auszuwählen:

- (1) Wenn $\dim_K(V) = \dim_K(W)$ gilt, dann gibt es einen Isomorphismus von V nach W .
- (2) Wenn $\dim_K(V) = \dim_K(W)$ gilt, dann ist jede lineare Abbildung von V nach W ein Isomorphismus.
- (3) Wenn $\dim_K(V) \neq \dim_K(W)$ gilt, dann gibt es keinen Isomorphismus von V nach W .
- (4) Wenn $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist $V \cong K^n$.

(1), (3) und (4) sind richtig nach Korollar 6.24.

(2) ist falsch. Sei dazu V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K , so dass $V \neq \{0_V\}$. Denken Sie etwa an $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$. Setze $W := V$. Klarerweise gilt $\dim_K(V) = \dim_K(W)$. Die Abbildung $O_{V,W} : V \rightarrow W, v \mapsto 0_W$ ist nach Beispiel 6.13 linear, aber kein Monomorphismus und damit auch kein Isomorphismus.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie Lemma 6.21, um zu überprüfen, ob φ ein Monomorphismus ist.

Lösung

Wir zeigen zunächst, dass φ linear ist. Dies lässt sich auf zwei Arten bestätigen: erstens durch direktes Nachrechnen, zweitens mithilfe von Beispiel 6.5. Wir präsentieren beide Wege.

Zunächst zeigen wir durch direktes Nachrechnen, dass φ linear ist. Seien dazu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in$

$\mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (x+x') + (y+y') \\ (x+x') - (y+y') \\ (x+x') + (y+y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x+y) + (x'+y') \\ (x-y) + (x'-y') \\ (x+y) + (x'+y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y' \\ x'-y' \\ x'+y' \end{pmatrix} \\ &= \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x + \lambda y \\ \lambda x - \lambda y \\ \lambda x + \lambda y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x+y) \\ \lambda(x-y) \\ \lambda(x+y) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix} \\ &= \lambda \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Folglich ist φ linear.

Alternativ lässt sich die Linearität von φ begründen, indem man beobachtet, dass φ gerade die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ist und man dann Beispiel 6.5 anwendet.

Nun klären wir die Frage, ob φ sogar ein Monomorphismus ist. Nach Lemma 6.21 ist dies genau dann der Fall, wenn $\text{Kern}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ gilt. Wir zeigen nun, dass dies der Fall ist. Sei dazu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Kern}(\varphi)$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $x + y = 0$ und $x - y = 0$. Also $0 = (x + y) + (x - y) = 2x$ und damit $x = 0$. Es folgt $0 = x + y = 0 + y = y$. Also $x = y = 0$ und damit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Folglich gilt $\text{Kern}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, sodass φ ein Monomorphismus ist.

Aufgabe 3

Sei

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y - w \\ 2x \\ z + w \\ x + z + w \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ und sei

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- (a) Zeigen Sie, dass f linear ist (*Hinweis: Dies können Sie durch direktes Nachrechnen oder unter Verwendung von Beispiel 6.5 zeigen*).
- (b) Berechnen Sie $\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{E})$.
- (c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.
- (d) Berechnen Sie $\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{B})$.

Lösung

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Für $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Beispiel 6.5 impliziert, dass f linear ist.

Alternativ könnte man dies auch direkt nachrechnen (so wie in Aufgabe 2).

(b) Sei $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_2 + e_4, & f(e_2) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1, \\ f(e_3) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3 + e_4, & f(e_4) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -e_1 + e_3 + e_4, \end{aligned}$$

sodass

$$\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_4)$. Wir zeigen zuerst, dass die Vektoren b_1, b_2, b_3, b_4 linear unabhängig sind. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Dann

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen sofort $\lambda_4 = 0$ ab. Schauen wir jetzt auf die zweite Zeile und nutzen wir aus, dass $\lambda_4 = 0$ gilt, so sehen wir $0 = \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_3 + 0 = \lambda_3$. Die zweite Zeile liefert nun $0 = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_2 + 0 + 0 = \lambda_2$. Und schließlich liefert die erste Zeile $0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_1 + 0 + 0 + 0 = \lambda_1$. Es gilt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Und damit sind die Vektoren b_1, b_2, b_3, b_4 linear unabhängig.

Wegen der linearen Unabhängigkeit der vier Vektoren hat ihr Erzeugnis $\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$ Dimension 4. Es ist also $\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$ ein 4-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Da $\mathbb{R}^4$ ebenfalls Dimension 4 hat, liefert Korollar 3.59, dass $\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle = \mathbb{R}^4$.

Hiermit ist gezeigt, dass (b_1, b_2, b_3, b_4) eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2b_1 + 2b_2 - b_3 + b_4, & f(e_2) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2b_1, \\ f(e_3) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -b_2 + b_4, & f(e_4) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -b_1 - b_2 + b_4. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Wir betrachten die Abbildung f aus Aufgabe 3. Sei $\mathcal{E}$ wieder die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$.

- (a) Bestimmen Sie $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$ sowie eine Basis von $\text{Kern}(f)$ und eine Basis von $\text{Bild}(f)$. Welche Dimensionen haben $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$?
- (b) Hätten Sie $\dim(\text{Bild}(f))$ auch bestimmen können, ohne $\text{Bild}(f)$ zu berechnen? Wenn ja, wie?
- (c) Sei $m := \dim(\text{Kern}(f))$. Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^4$, so dass die letzten m Spalten von $\text{Mat}(f, \mathcal{C}, \mathcal{E})$ nur Nullen enthalten.

(d) Finden Sie Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ von $\mathbb{R}^4$, so dass

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung

(a) Es ist $\text{Kern}(f)$ die Menge aller Vektoren aus $\mathbb{R}^4$, die von f auf $0_{\mathbb{R}^4}$ abgebildet werden. Nach Definition von f gilt also

$$\text{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 2y - w \\ 2x \\ z + w \\ x + z + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit ist $\text{Kern}(f)$ gerade die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir können dieses lineare Gleichungssystem wie üblich lösen, also durch Bilden der erweiterten Koeffizientenmatrix und anschließendes Überführen derselben in reduzierte Stufenform mittels elementarer Zeilenumformungen (im Klartext: man löst es so wie in den Aufgaben 5 und 6 auf Blatt 9). Man erhält als Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Lösungsmenge ist also gerade das Erzeugnis des Vektors

$$u := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$\text{Kern}(f) = \langle u \rangle.$$

Der Vektor u ist linear unabhängig, da er nicht der Nullvektor ist. Und er erzeugt $\text{Kern}(f)$. Somit bildet er eine Basis von $\text{Kern}(f)$. Daraus folgt $\dim(\text{Kern}(f)) = 1$.

Wir bestimmen nun $\text{Bild}(f)$. Wie wir in der Lösung von Aufgabe 3 (i) gesehen haben, ist f gerade die Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Beispiel 6.19 impliziert, dass $\text{Bild}(f)$ gerade von den Spaltenvektoren der obigen Matrix erzeugt wird, also dass

$$\text{Bild}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Wir wollen nun eine Basis von $\text{Bild}(f)$ bestimmen. Nach Korollar 3.46 enthält jedes endliche Erzeugendensystem eines endlich-dimensionalen Vektorraums eine Basis dieses Vektorraums. Somit ist in

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\text{Bild}(f)$ enthalten. Wir probieren nun, eine solche Basis zu finden. Wir beobachten zunächst, dass die drei Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Dass dem so ist, kann man leicht mit Aufgabe 4 (a) auf Blatt 8 sehen. Nach dieser Aufgabe reicht es aus, zu zeigen, dass keiner der drei Vektoren eine Linearkombination der beiden anderen ist. Die y -Koordinate jeder Linearkombination von v_2 und v_3 ist 0. Da die y -Koordinate von v_1 hingegen 2 ist, kann also v_1 keine Linearkombination von v_2 und v_3 sein. Genauso ist die x -Koordinate einer jeden Linearkombination von v_1 und v_3 gleich 0, womit eine solche Linearkombination nicht gleich v_2 sein kann. Die z -Koordinate jeder Linearkombination von v_1 und v_2 ist ebenfalls gleich 0, womit eine solche Linearkombination nicht gleich v_3 sein kann. Keiner der

drei Vektoren ist also eine Linearkombination der beiden anderen. Somit sind sie nach Aufgabe 4 (a) auf Blatt 8 linear unabhängig. Es gilt

$$v_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3 - \frac{1}{2}v_2 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle.$$

Eine Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 ist also immer auch eine Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 . Und umgekehrt ist eine Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 natürlich immer eine Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4 . Die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren v_1, v_2, v_3 ist also gleich der Menge aller Linearkombinationen der Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 . Es gilt also

$$\text{Bild}(f) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle.$$

Da die Vektoren v_1, v_2, v_3 , wie wir oben beobachtet haben, linear unabhängig sind, folgt, dass (v_1, v_2, v_3) eine Basis von $\text{Bild}(f)$ ist. Es gilt also $\dim(\text{Bild}(f)) = 3$.

- (b) Wir hätten $\dim(\text{Bild}(f))$ auch bestimmen können, ohne $\text{Bild}(f)$ auszurechnen. Denn nach dem Dimensionssatz gilt

$$4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)).$$

Und zu Beginn von (a) haben wir $\dim(\text{Kern}(f)) = 1$ ausgerechnet. Daraus hätten wir also bereits $\dim(\text{Bild}(f)) = 4 - 1 = 3$ folgern können. Eine Basis von $\text{Bild}(f)$ hätten wir damit natürlich noch nicht gehabt!

- (c) Es gilt $m = \dim(\text{Kern}(f)) = 1$. Wir sollen also eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^4$ bestimmen, so dass die letzte Spalte von $\text{Mat}(f, \mathcal{C}, \mathcal{E})$ nur aus Nullen besteht. Seien v_1, v_2, v_3 und u so wie in der Lösung von (a). Seien e_1, e_2, e_3, e_4 die Standardbasisvektoren.

Es gilt $f(u) = 0_{\mathbb{R}^4}$, da u im Kern von f liegt. Insbesondere gilt also $f(u) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$. Wenn also (v_1, v_2, v_3, u) eine Basis sein sollte, dann hätte die Matrix von f bezüglich dieser Basis und $\mathcal{E}$ in der letzten Spalte nur Nullen, so wie wir uns das wünschen.

Und man kann sich überlegen, dass (v_1, v_2, v_3, u) tatsächlich eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist. Dazu kann man z. B. zunächst nachprüfen, dass die vier Vektoren linear unabhängig sind und dann Korollar 3.59 anwenden, um zu folgern, dass ihr Erzeugnis gleich $\mathbb{R}^4$ ist. Das führen wir nicht im Detail vor, da es so ähnlich funktioniert wie in (a) der Nachweis der linearen Unabhängigkeit der Vektoren v_1, v_2, v_3 .

Es ist also $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3, u)$ eine Basis mit der gewünschten Eigenschaft.

(d) Sei weiterhin $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3, u)$. Wir setzen $\mathcal{B}_1 := \mathcal{C}$.

Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, so ist $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{Bild}(f)$ und $\lambda_4 u \in \langle u \rangle = \text{Kern}(f)$. Die Linearkombination $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 u$ liegt also in $\text{Kern}(f) + \text{Bild}(f)$. Und da jeder Vektor aus $\mathbb{R}^4$ eine Linearkombination von v_1, v_2, v_3, u ist, folgt $\mathbb{R}^4 = \text{Kern}(f) + \text{Bild}(f)$. Insbesondere gilt $\dim(\text{Kern}(f) + \text{Bild}(f)) = 4$.

Nach der Dimensionsformel gilt weiterhin

$$\begin{aligned} 4 &= \dim(\text{Kern}(f) + \text{Bild}(f)) \\ &= \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) - \dim(\text{Kern}(f) \cap \text{Bild}(f)) \\ &= 1 + 3 - \dim(\text{Kern}(f) \cap \text{Bild}(f)) \\ &= 4 - \dim(\text{Kern}(f) \cap \text{Bild}(f)). \end{aligned}$$

Damit gilt $\dim(\text{Kern}(f) \cap \text{Bild}(f)) = 0$. Und hieraus folgt $\text{Kern}(f) \cap \text{Bild}(f) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Wir betrachten nun die Abbildung

$$f|_{\text{Bild}(f)} : \text{Bild}(f) \rightarrow \mathbb{R}^4, x \mapsto f(x).$$

Die Linearität von f impliziert, dass $f|_{\text{Bild}(f)}$ eine lineare Abbildung von $\text{Bild}(f)$ nach $\mathbb{R}^4$ ist. Außerdem gilt

$$\text{Kern}(f|_{\text{Bild}(f)}) = \{x \in \text{Bild}(f) \mid f(x) = 0_{\mathbb{R}^4}\} = \text{Bild}(f) \cap \text{Kern}(f) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}.$$

Lemma 6.21 impliziert, dass $f|_{\text{Bild}(f)}$ ein Monomorphismus ist. Dann impliziert Lemma 6.23 (a), dass $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ linear unabhängig sind.

Nach Vorlesung können wir $(f(v_1), f(v_2), f(v_3))$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen. Sei daher $w \in \mathbb{R}^4$ ein Vektor aus $\mathbb{R}^4$, so dass $(f(v_1), f(v_2), f(v_3), w)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist. Setze $\mathcal{B}_2 := (f(v_1), f(v_2), f(v_3), w)$.

Es folgt nun fast unmittelbar aus den Definitionen von $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$, dass $\text{Mat}(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ die in der Aufgabenstellung angegebene Matrix ist.

Hinweise

1. Sie sehen, dass die Lösung dieser Aufgabe ziemlich lang ist. Machen Sie sich keine Sorgen, dass eine derart umfangreiche Aufgabe in der Klausur drankommt. Dort werden sich die Aufgaben kürzer lösen lassen. Außerdem sind Aufgaben wie (c) und (d) zwar gut für den Lerneffekt, aber eher ungeeignet für die Klausur.
2. Es haben (c) und (d) einen gehobenen Schwierigkeitsgrad. Es ist gut, wenn Sie die Lösung von (c) und (d) im Detail nachvollziehen. Wenn Ihnen dafür aber die Zeit fehlt, ist das nicht dramatisch.

Aufgabe 5

Sei K ein Körper.

- (i) (Zum Selbststudium) Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Nach Beispiel 3.3 ist $\mathcal{M}_{n \times m}(K)$ ein Vektorraum über K . Für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ sei E_{ij} die Matrix aus $\mathcal{M}_{n \times m}(K)$, deren (i, j) -Eintrag gleich 1 ist, während alle anderen Einträge gleich 0 sind. Machen Sie sich klar, dass $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ eine Basis von $\mathcal{M}_{n \times m}(K)$ ist.

- (ii) Sei nun $V := \mathcal{M}_{2 \times 2}(K)$. Nach (i) ist

$$\mathcal{E} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von V . Sei

$$x := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V.$$

Weiter sei

$$\psi_x : V \longrightarrow V, y \mapsto xyx.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung ψ_x linear ist.
(b) Bestimmen Sie $\text{Mat}(\psi_x, \mathcal{E})$.

Lösung

- (i) Sei $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(K)$ mit $A = (a_{ij})$. Dann gilt $A = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{1, \dots, m\}}} a_{ij} E_{ij}$, sodass $\mathcal{M}_{n \times m}(K) = \langle \mathcal{B} \rangle$ gilt, wobei $\mathcal{B} := \{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Wir müssen nun beweisen, dass $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist.
Sei $\sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{1, \dots, m\}}} k_{ij} E_{ij} = O_{n \times m}$ mit $k_{i,j} \in K$. Wegen

$$\sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{1, \dots, m\}}} k_{ij} E_{ij} = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nm} \end{pmatrix}$$

muss $k_{i,j} = 0$ gelten für alle i, j . Das heißt, dass $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist und damit eine Basis ist.

- (ii) (a) Es gilt $\psi_x(y + y') = x(y + y')x = xyx + xy'x$ nach der Distributivität der Multiplikation von Matrizen.

Wie üblich sei $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass $(\lambda I_2)y = y(\lambda I_2) = \lambda y$ für alle $\lambda \in K$ und $y \in V$ (tun Sie das). Daraus folgt, dass $\psi_x(\lambda y) = x(\lambda y)x = x(\lambda I_2)y x = \lambda I_2(xyx) = \lambda \psi_x(y)$. Damit ist ψ_x linear.

(b) Sei $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Man rechnet aus, dass

$$\psi_x(e_1) = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ac & bc \end{pmatrix},$$

$$\psi_x(e_2) = \begin{pmatrix} ac & ad \\ c^2 & cd \end{pmatrix},$$

$$\psi_x(e_3) = \begin{pmatrix} ab & b^2 \\ ad & bd \end{pmatrix},$$

$$\psi_x(e_4) = \begin{pmatrix} bc & bd \\ cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

Damit

$$\text{Mat}(\psi_x, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} a^2 & ac & ab & bc \\ ab & ad & b^2 & bd \\ ac & c^2 & ad & cd \\ bc & cd & bd & d^2 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 19.01.2022, 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ 2y - t \end{pmatrix}.$$

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass f linear ist. Sie dürfen dies ohne Beweis verwenden.

Sei außerdem

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - t = 0 \right\}.$$

- (a) Berechnen Sie $\text{Kern}(f)$, $\text{Bild}(f)$ sowie die Dimensionen von $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$.
- (b) Finden Sie eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $\text{Kern}(g) = W$. Gibt es eine Abbildung g mit dieser Eigenschaft, so dass g nicht surjektiv ist?
- (c) Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}$, $\mathcal{E}_2$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{E}_4$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$. Berechnen Sie $\text{Mat}(f, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_2)$ sowie $\text{Mat}(g, \mathcal{E}_4, \mathcal{E})$.

Lösung

- (a) Es ist $\text{Kern}(f)$ die Menge aller Vektoren aus $\mathbb{R}^4$, die unter f auf $0_{\mathbb{R}^2}$ abgebildet werden.
 Es gilt also

$$\begin{aligned} \text{Kern}(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ 2y - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : z = 2y - 3x, t = 2y \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2y - 3x \\ 2y \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \\ 2\lambda - 3\mu \\ 2\lambda \end{pmatrix} \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} : \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Die beiden oben vorkommenden Vektoren sind linear unabhängig, denn der zweite kann keine Linearkombination des ersten sein, weil alle Linearkombinationen des ersten y -Koordinate Null haben. Ähnlich ist der erste Vektor keine Linearkombination des zweiten. Nach Aufgabe 4 (a) auf Blatt 8 müssen die beiden Vektoren also linear unabhängig sein. Sie bilden damit eine Basis von $\text{Kern}(f)$. Dementsprechend gilt $\dim(\text{Kern}(f)) = 2$.

Um $\text{Bild}(f)$ zu bestimmen, beobachten wir, dass gemäß der Dimensionsformel

$$4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$$

gilt. Wegen $\dim(\text{Kern}(f)) = 2$ folgt $\dim(\text{Bild}(f)) = 2$. Es ist also $\text{Bild}(f)$ ein zweidimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^2$. Da $\mathbb{R}^2$ auch Dimension 2 hat, folgt $\text{Bild}(f) = \mathbb{R}^2$.

Auf eine andere Weise kann man das wie folgt einsehen: Es ist f gerade die Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

ist.

Nach Beispiel 6.19 gilt damit

$$\text{Bild}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Der erste und letzte Vektor (oder auch der erste und zweite) sind linear unabhängig. Damit muss das Bild mindestens Dimension 2 haben. Also genau Dimension 2, da es ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist. Es gilt also $\text{Bild}(f) = \mathbb{R}^2$.

Eleganter ist aber der Weg über die Dimensionsformel. Oder was meinen Sie?

(b) Definiere

$$g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto 2x - y - t.$$

Dann gilt $W = \text{Kern}(g)$ nach der Definition von W .

Können wir g so wählen, dass g nicht surjektiv ist? Nehmen wir an, dass das ginge. Dann ist $\text{Bild}(g) \neq \mathbb{R}$. Es ist also $\text{Bild}(g)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}$, der kleinere Dimension als $\mathbb{R}$ hat. Damit muss $\text{Bild}(g)$ aber Dimension 0 haben, also gleich $\{0\}$ sein. Dann würde aber jedes Element von $\mathbb{R}^4$ auf 0 abgebildet werden und der Kern wäre ganz $\mathbb{R}^4$ und nicht bloß W . Man kann g also nicht so wählen, dass g nicht surjektiv ist.

(c) Sei $\mathcal{B}_4 = (e_1, \dots, e_4)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f(e_2) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ f(e_3) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f(e_4) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

sodass $\text{Mat}(f, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Es gilt auch

$$g(e_1) = 2, g(e_2) = -1, g(e_3) = 0, g(e_4) = -1,$$

sodass $\text{Mat}(g, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7 (1 Punkt)

Gegeben ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - z \\ y - z \\ 0 \\ x - y \end{pmatrix}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass φ eine lineare Abbildung ist. Dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden. Nutzen Sie Lemma 6.21, um zu überprüfen, ob φ sogar ein Monomorphismus ist.

Lösung

Nach Lemma 6.21 ist φ genau dann ein Monomorphismus, wenn $\text{Kern}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ gilt. Dies ist nicht der Fall, denn wegen

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

liegt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Kern von φ . Somit ist φ kein Monomorphismus.

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Beispiel 3.3 ist $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ ein Vektorraum über K . Sei

$$T : \mathcal{M}_{n \times n}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(K), A \mapsto A^t - A.$$

(i) Zeigen Sie, dass T linear ist. (*Hinweis: Sie benötigen in Ihrem Beweis die Aussagen aus Beispiel 6.10. Diese dürfen Sie, wie alle Resultate der Vorlesung, ohne Beweis verwenden.*)

(ii) Folgern Sie aus (i) und aus einem geeigneten Lemma aus der Vorlesung, dass

$$\{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K) \mid A = A^t\}$$

ein Unterraum von $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ ist.

Lösung

(i) Für $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ gilt

$$\begin{aligned} T(A+B) &= (A+B)^t - (A+B) \\ &= A^t + B^t - A - B && \text{nach Beispiel 6.10} \\ &= (A^t - A) + (B^t - B) && \text{da Addition in } \mathcal{M}_{n \times n}(K) \text{ kommutativ} \\ &= T(A) + T(B). \end{aligned}$$

Für $\lambda \in K$ und $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ gilt

$$\begin{aligned} T(\lambda A) &= (\lambda A)^t - \lambda A \\ &= \lambda A^t - \lambda A && \text{nach Beispiel 6.10} \\ &= \lambda(A^t - A) && \text{nach Distributivität der Skalarmultiplikation in } \mathcal{M}_{n \times n}(K) \\ &= \lambda T(A). \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Kern}(T) &= \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K) \mid T(A) = 0_{\mathcal{M}_{n \times n}(K)}\} \\ &= \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K) \mid A^t - A = 0_{\mathcal{M}_{n \times n}(K)}\} \\ &= \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K) \mid A^t = A\}. \end{aligned}$$

Die zu zeigende Aussage folgt nun aus der Tatsache, dass $\text{Kern}(T)$ nach Lemma 6.18 ein Unterraum von $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ ist.

Zusatzaufgabe

Die folgenden Aufgaben stellen besondere Herausforderungen dar. Die Aufgaben werden nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung präsentieren.

Aufgabe 9

Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) = 2$, sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $\alpha \in \text{Hom}(V, V)$ mit $\alpha \circ \alpha = \text{id}_V$. Setze $\text{Fix}(\alpha) := \{v \in V \mid \alpha(v) = v\}$. Man zeige, dass $\text{Fix}(\alpha)$ ein Unterraum von V mit $\dim(\text{Fix}(\alpha)) \geq \frac{1}{2} \dim(V)$ ist.

Lösung

Angenommen $\dim_K(V) = n$. Man definiert die Abbildung $f \in \text{Hom}(V, V)$, $f(v) := v - \alpha(v)$. Weil $f = \text{id}_V - \alpha$ ist und beide linear sind, ist auch f linear. Nach $\text{char}(K) = 2$ gelten

$$\text{Fix}(\alpha) = \ker(f) \quad \text{und} \quad \alpha(x - \alpha(v)) = \alpha(v) - v = v - \alpha(v).$$

Insbesondere ist $\text{Fix}(\alpha)$ ein Unterraum von V und $\text{Bild}(f) \subseteq \text{Fix}(\alpha) = \text{Kern}(f)$. Nach Satz 6.27 gilt

$$n = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) \leq 2 \dim(\text{Kern}(f)) = 2 \dim(\text{Fix}(\alpha)),$$

d.h. $\dim(\text{Fix}(\alpha)) \geq \frac{1}{2}n$.

Aufgabe 10

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ und sei $V^* := \text{Hom}(V, K)$. Dann ist V^* ein Vektorraum über K , wobei die Addition durch

$$(f + g) : V \rightarrow K, v \mapsto f(v) + g(v)$$

für $f, g \in V^*$ und die Skalarmultiplikation

$$(\lambda f) : V \rightarrow K, v \mapsto \lambda f(v)$$

für $f \in V^*$ und $\lambda \in K$ gegeben ist. Dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden. Man nennt V^* den *Dualraum* von V .

Beweisen Sie, dass $V \cong V^*$ gilt. Wählen Sie dazu eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und zeigen Sie, dass die linearen Abbildungen

$$\eta_i : V \longrightarrow K, v_j \mapsto \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j, \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

eine Basis von V^* bilden (wenn Sie die Definition von η_i nicht verstehen, dann wiederholen Sie Lemma 6.22). Wenden Sie nun ein geeignetes Korollar aus der Vorlesung an, um zu schließen, dass $V \cong V^*$ gilt.

Lösung

Beachte, dass $\eta_i(v_j) = \delta_{i,j}$.

Sei $\mathcal{B}^* := (\eta_1, \dots, \eta_n)$; wir beweisen, dass $\mathcal{B}^*$ eine Basis von V^* ist.

Sei $f \in V^*$ und $v \in V$; seien $k_i \in K$ sodass $v = \sum_{i=1}^n k_i v_i$. Es gilt auch

$$f(v_i) = f(v_i) \eta_i(v_i) = \sum_{j=1}^n \eta_j(f(v_j) v_i)$$

$$\begin{aligned}
 f(v) &= f\left(\sum_{i=1}^n k_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n k_i f(v_i) = \sum_{i=1}^n \left(k_i \sum_{j=1}^n \eta_j(f(v_i)v_i)\right) = \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n k_i \eta_j(f(v_i)v_i)\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n f(v_i) \eta_j(k_i v_i)\right) = \\
 &= \sum_{j=1}^n f(v_j) \left(\eta_j\left(\sum_{i=1}^n k_i v_i\right)\right) = \sum_{j=1}^n f(v_j) \eta_j(v)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $f = \sum_{j=1}^n f(v_j) \eta_j$ gilt, sodass $V^* = \langle \eta_j \mid j \in \{1, \dots, n\} \rangle$.

Wenn $\sum_{j=1}^n h_j \eta_j = \hat{0}$ ist, wobei $h_j \in K$ und $\hat{0} : V \rightarrow K$, $\hat{0}(v) = 0$ für alle $v \in V$, gelten

$$0 = \left(\sum_{j=1}^n h_j \eta_j\right)(v_i) = \sum_{j=1}^n h_j \eta_j(v_i) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dann $0 = \sum_{j=1}^n h_j \eta_j(v_i) = \sum_{j=1}^n h_j \delta_{i,j} = h_i$, sodass $\mathcal{B}^*$ ist l.u.. D.h., dass $\mathcal{B}^*$ eine Basis von V^* ist.

Nach Beispiel 6.15 gelten

$$V \cong K^n \cong V^*,$$

sodass $V \cong V^*$ auch gilt.