

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der zwölften Übung. Der späteste Abgabetermin ist der 20.01 um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem zwölften Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 12* finden.

Erste Vorbereitungsaufgabe

Die erste Vorbereitungsaufgabe lautete wie folgt:

Gegeben sind die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & x + 2y \\ 3x - 5y & y \end{pmatrix}$$

und

$$g : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), A \mapsto A^t.$$

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass f linear ist. Ebenso ist g gemäß Beispiel 6.10 linear. Sei

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Sei außerdem

$$\mathcal{E} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Nach Aufgabe 5 (i) auf Blatt 11 ist $\mathcal{E}$ eine Basis von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Berechnen Sie die Matrizen $\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{E})$ und $\text{Mat}(g, \mathcal{E})$. Nutzen Sie dies zusammen mit Satz 7.6, um $\text{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{E})$ zu bestimmen.

Lösung

Wir schreiben $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ und $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Es gilt

$$f(b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2 + 3e_3, f(b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = e_1 + 3e_2 - 2e_3 + e_4.$$

Es folgt

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$g(e_1) = e_1, g(e_2) = e_3, g(e_3) = e_2, g(e_4) = e_4.$$

Es folgt

$$\text{Mat}(g, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung von Satz 7.11 folgt

$$\text{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{E}) = \text{Mat}(g, \mathcal{E}) \text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zweite Vorbereitungsaufgabe

Die zweite Vorbereitungsaufgabe lautete wie folgt:

Seien V und W Vektorräume über einem Körper K . Sei $\mathcal{B}_V = (v_1, v_2)$ eine Basis von V und sei $\mathcal{B}_W = (w_1, w_2)$ eine Basis von W . Sei $\varphi : V \rightarrow W$ linear mit $\varphi(v_1) = w_1$ und $\varphi(v_2) = \lambda w_1 + w_2$ für ein $\lambda \in K$. Wir wollen zeigen, dass φ ein Isomorphismus ist. Unten sehen Sie einen Beweis hierfür, allerdings nicht in der richtigen Reihenfolge. Ordnen Sie den Beweis so an, dass man ihn von oben nach unten in der richtigen Reihenfolge lesen kann.

Lösung

Im Folgenden geben wir die anzuordnenden Teile des Beweises in der richtigen Reihenfolge an:

1. Nach Voraussetzung gilt $\varphi(v_1) = w_1$ und $\varphi(v_2) = \lambda w_1 + w_2$.
2. Daraus folgt $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Es gilt $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Somit ist $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ invertierbar.
5. Satz 7.11 impliziert nun, dass φ ein Isomorphismus ist.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y & x + 5z \\ x + y & z \end{pmatrix}$$

und

$$g : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), A \mapsto A^t - A$$

und

$$h : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a + b \\ b + 5c \\ c + d \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung g ist nach Aufgabe 8 auf Blatt 11 linear. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass auch f und h linear sind. Dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden. Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Sei außerdem

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Nach Aufgabe 5 (i) auf Blatt 11 ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (i) Berechnen Sie $\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{B})$.
- (ii) Berechnen Sie $\text{Mat}(g, \mathcal{B})$.
- (iii) Berechnen Sie $\text{Mat}(h, \mathcal{B}, \mathcal{E})$.
- (iv) Nutzen Sie (i), (ii) und (iii), um eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ zu bestimmen, so dass

$$(h \circ g \circ f)(x) = Ax$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

Lösung

Wir schreiben $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ und $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$.

(i) Es gilt

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = b_2 + b_3, f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2b_1 + b_3, f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5b_2 + b_4.$$

Daraus folgt

$$\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} g(b_1) &= (b_1)^t - b_1 = 0_{\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}, \\ g(b_2) &= (b_2)^t - b_2 = b_3 - b_2, \\ g(b_3) &= (b_3)^t - b_3 = b_2 - b_3, \\ g(b_4) &= (b_4)^t - b_4 = 0_{\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\text{Mat}(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) Es gilt

$$h(b_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1, h(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2, h(b_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 5e_2 + e_3, h(b_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3.$$

Daraus folgt

$$\text{Mat}(h, \mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iv) Nach Satz 7.6 gilt

$$\begin{aligned} \text{Mat}(h \circ g \circ f, \mathcal{E}) &= \text{Mat}(h, \mathcal{B}, \mathcal{E}) \text{Mat}(g, \mathcal{B}) \text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{B}) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & 20 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Setze nun $A := \text{Mat}(h \circ g \circ f, \mathcal{E})$. Nach Satz 7.4 gilt dann, wie gewünscht,

$$(h \circ g \circ f)(x) = Ax$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3

Nach Aufgabe 8 (ii) auf Blatt 11 ist

$$W := \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$$

ein Unterraum von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow W, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & 5(-x + y - z) \\ 5(-x + y - z) & z \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass φ linear ist.

Sei weiterhin $\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

- (i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
- (ii) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}_W$ von W .
- (iii) Berechnen Sie $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}_W)$.
- (iv) Folgern Sie aus (iii), dass φ ein Isomorphismus ist.
- (v) Können Sie, anstatt (ii) zu verwenden, auch unter Verwendung von Lemma 6.23 zeigen, dass φ ein Isomorphismus ist?

Lösung

(i) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$. Daraus folgt weiter $0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 + 0 + \lambda_3 = \lambda_3$. Also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Somit sind die drei Vektoren linear unabhängig. Wegen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ folgt unter Verwendung von Korollar 3.56, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) Setze

$$W_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir zeigen zunächst, dass $W = W_0$.

$\subseteq$: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Also $b = c$ und somit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in W_0.$$

$\supseteq$: Sei nun $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in W_0$. Dann gilt

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t = B^t$$

und somit $B \in W$.

Setze

$$\mathcal{B}_W := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, womit die drei Matrizen linear unabhängig sind.

Für $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in W$ gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es lässt sich also jedes Element von W als eine Linearkombination der Matrizen aus $\mathcal{B}_W$ schreiben. Folglich ist $\mathcal{B}_W$ eine Basis von W .

(iii) Wir schreiben $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ und $\mathcal{B}_W = (w_1, w_2, w_3)$. Dann gilt

$$\varphi(b_1) = w_1, \varphi(b_2) = w_2, \varphi(b_3) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 5w_3.$$

Folglich gilt

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}_W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(iv) Es ist $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}_W)$ invertierbar mit

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}_W)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Damit ist φ nach Satz 7.11 ein Isomorphismus.

(v) Wie wir gesehen haben, gilt

$$\varphi(b_1) = w_1, \varphi(b_2) = w_2, \varphi(b_3) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 5w_3.$$

Wir zeigen nun, dass $(w_1, w_2, 5w_3)$ eine Basis von W ist. Seien dazu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$0_W = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 (5w_3) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + (5\lambda_3)w_3 = 0_W.$$

Da (w_1, w_2, w_3) eine Basis von W ist, folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 5\lambda_3 = 0$. Mit $5\lambda_3 = 0$ gilt $\lambda_3 = 0$. Also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Somit sind $w_1, w_2, 5w_3$ linear unabhängig. Nach Korollar 3.56 ist also $(w_1, w_2, 5w_3)$ eine Basis von W . Lemma 6.23 impliziert nun, dass φ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$. Zeigen Sie: Ist A invertierbar, so ist A^t invertierbar und das Inverse von A^t ist $(A^{-1})^t$. Insbesondere ist A invertierbar genau dann, wenn A^t invertierbar ist.

Lösung

Angenommen, A ist invertierbar. Nach Aufgabe 5 (i) auf Blatt 10 gilt

$$(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = (I_n)^t = I_n.$$

Analog sieht man, dass $A^t(A^{-1})^t = I_n$. Damit ist A^t invertierbar und das Inverse von A^t ist $(A^{-1})^t$.

Wir begründen nun die letzte Aussage, also dass A genau dann invertierbar ist, wenn A^t invertierbar ist.

$\Rightarrow$: Ist A invertierbar, so auch A^t , wie wir oben gezeigt haben.

$\Leftarrow$: Angenommen, A^t ist invertierbar. Nach oben Gezeigtem ist dann auch $(A^t)^t$ invertierbar. Es gilt aber $(A^t)^t = A$, womit also A invertierbar ist.

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 26.01.2022, 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gegeben sind die Abbildungen

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y & 2z \\ z-x & 2x-z \end{pmatrix}$$

und

$$g: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

und

$$h: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ b+3c \\ b+d \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Abbildungen f , g und h linear sind. Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Es ist $\mathcal{B}$ nach Aufgabe 5 (i) auf Blatt 11 eine Basis von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (i) Berechnen Sie $\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{B})$.
- (ii) Berechnen Sie $\text{Mat}(g, \mathcal{B})$.
- (iii) Berechnen Sie $\text{Mat}(h, \mathcal{B}, \mathcal{E})$.
- (iv) Nutzen Sie (i), (ii) und (iii), um eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ zu finden, so dass

$$(h \circ g \circ f)(x) = Ax$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

- (v) Zeigen Sie, dass g ein Automorphismus von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ist. (*Hinweis: Da Sie die Linearität von g ohne Beweis verwenden dürfen, müssen Sie nur zeigen, dass g bijektiv ist. Dazu reicht es wiederum, zu zeigen, dass g eine Umkehrabbildung besitzt. Und eine solche können Sie finden, wenn Sie sich die in der Definition von g auftauchende Matrix anschauen und sich an Ihre Lösung von Aufgabe 7 auf Blatt 10 erinnern.*)
- (vi) Nutzen Sie (v) und Satz 7.11, um zu zeigen, dass $\text{Mat}(g, \mathcal{B})$ invertierbar ist und um das Inverse zu bestimmen.

Lösung

Wir schreiben $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ und $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$.

- (i) Es gilt

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = b_1 - b_3 + 2b_4, f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b_1, f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2b_2 + b_3 - b_4.$$

Daraus folgt

$$\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Es gilt

$$\begin{aligned} g(b_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b_1, \\ g(b_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b_2, \\ g(b_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 5b_1 + b_3, \\ g(b_4) &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5b_2 + b_4. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\text{Mat}(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Es gilt

$$h(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1, h(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_2 + e_3, h(b_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3e_2, h(b_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3.$$

Daraus folgt

$$\text{Mat}(h, \mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iv) Nach Satz 7.4 gilt

$$\begin{aligned} \text{Mat}(h \circ g \circ f, \mathcal{E}) &= \text{Mat}(h, \mathcal{B}, \mathcal{E}) \text{Mat}(g, \mathcal{B}) \text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{B}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Setze $A := \text{Mat}(h \circ g \circ f, \mathcal{E})$. Nach Satz 7.6 gilt, wie gewünscht,

$$(h \circ g \circ f)(x) = Ax$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

(v) Sei

$$g^* : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und ebenso

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ gilt nun

$$\begin{aligned} (g \circ g^*)(A) &= g(g^*(A)) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \\ &= A \end{aligned}$$

und analog

$$(g^* \circ g)(A) = A.$$

Somit gilt $g \circ g^* = \text{id}_{\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})} = g^* \circ g$. Nach Lemma 1.13 ist g also bijektiv und somit ein Automorphismus von g . Es gilt $g^{-1} = g^*$.

- (vi) Nach (v) ist g ein Automorphismus, also ein Isomorphismus von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ nach $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Satz 7.11 impliziert, dass $\text{Mat}(g, \mathcal{B})$ invertierbar ist. Es gilt weiterhin $\text{Mat}(g, \mathcal{B})^{-1} = \text{Mat}(g^{-1}, \mathcal{B})$.

Es gilt

$$\begin{aligned} g^{-1}(b_1) &= \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b_1, \\ g^{-1}(b_2) &= \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b_2, \\ g^{-1}(b_3) &= \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -5b_1 + b_3, \\ g^{-1}(b_4) &= \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -5b_2 + b_4. \end{aligned}$$

Somit

$$\text{Mat}(g^{-1}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Ein Element $a \in R$ heißt *invertierbar*, falls ein $a^* \in R$ mit $aa^* = 1_R = a^*a$ existiert. Ein solches Element a^* wird dann ein Inverses von a genannt.

- (i) Zeigen Sie: Wenn $a \in R$ invertierbar ist, dann ist das Inverse von a eindeutig bestimmt. (*Bemerkung: Das eindeutig bestimmte Inverse eines invertierbaren Elements a von R wird mit a^{-1} bezeichnet.*)
- (ii) Sei $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und seien $r_1, \dots, r_k \in R$ invertierbar. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass das Produkt $r_1 r_2 \cdots r_k$ invertierbar ist mit Inversem $r_k^{-1} \cdots r_2^{-1} r_1^{-1}$.

Lösung

- (i) Angenommen, a ist invertierbar. Seien a^* und a^+ Inverse von a . Es gilt also $aa^* = 1_R = a^*a$ und $aa^+ = 1_R = a^+a$. Nun gilt $a^* = a^*1_R = a^*(aa^+) = (a^*a)a^+ = 1_R a^+ = a^+$.
- (ii) Wir zeigen die Aussage durch vollständige Induktion über k .

1. Induktionsanfang: Wir zeigen die Aussage für $k = 1$. Es ist r_1 invertierbar mit Inversem r_1^{-1} . Und das bedeutet bereits, dass die Aussage für $k = 1$ wahr ist.

2. Induktionsschritt: Sei nun k eine natürliche Zahl, so dass die Aussage für k stimmt, das heißt, wenn $r_1, r_2, \dots, r_k \in R$ invertierbar sind, dann ist immer auch $r_1 r_2 \cdots r_k$ invertierbar mit Inversem $r_k^{-1} \cdots r_2^{-1} r_1^{-1}$. Dies ist die Induktionsvoraussetzung.

Seien nun $r_1, \dots, r_{k+1} \in R$ invertierbar. Wir müssen zeigen dass $r_1 r_2 \cdots r_{k+1}$ invertierbar ist mit Inversem $r_{k+1}^{-1} \cdots r_2^{-1} r_1^{-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung sind $r_1 r_2 \cdots r_k$ und $r_2 r_3 \cdots r_{k+1}$ invertierbar mit $(r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1} = r_k^{-1} \cdots r_2^{-1} r_1^{-1}$ und $(r_2 r_3 \cdots r_{k+1})^{-1} = r_{k+1}^{-1} \cdots r_3^{-1} r_2^{-1}$. Nun gilt

$$\begin{aligned} (r_1 r_2 \cdots r_{k+1})(r_{k+1}^{-1} \cdots r_2^{-1} r_1^{-1}) &= (r_1 \cdots r_k)(r_{k+1} r_{k+1}^{-1})(r_k^{-1} \cdots r_2^{-1} r_1^{-1}) \\ &= (r_1 \cdots r_k)1_R(r_k^{-1} \cdots r_2^{-1} r_1^{-1}) \\ &= (r_1 \cdots r_k)(r_k^{-1} \cdots r_2^{-1} r_1^{-1}) \\ &= 1_R, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wegen $(r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1} = r_k^{-1} \cdots r_2^{-1} r_1^{-1}$ gilt.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} (r_{k+1}^{-1} \cdots r_2^{-1} r_1^{-1})(r_1 r_2 \cdots r_{k+1}) &= (r_{k+1}^{-1} \cdots r_3^{-1} r_2^{-1})(r_1^{-1} r_1)(r_2 r_3 \cdots r_{k+1}) \\ &= (r_{k+1}^{-1} \cdots r_3^{-1} r_2^{-1})1_R(r_2 r_3 \cdots r_{k+1}) \\ &= (r_{k+1}^{-1} \cdots r_3^{-1} r_2^{-1})(r_2 r_3 \cdots r_{k+1}) \\ &= 1_R, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wegen $(r_2 r_3 \cdots r_{k+1})^{-1} = r_{k+1}^{-1} \cdots r_3^{-1} r_2^{-1}$ gilt.

Dies zeigt, dass $r_1 r_2 \cdots r_{k+1}$ invertierbar ist mit Inversem $r_{k+1}^{-1} \cdots r_2^{-1} r_1^{-1}$, wie gewünscht.

Aufgabe 7 (freiwillig - 2 Zusatzpunkte)

Sei V ein 3-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}/2$. Bestimmen Sie die Mächtigkeit von $\text{Hom}(V, V)$. (*Das mag sich erst einmal schwierig anhören. Aber wenn Sie herausfinden, welches Resultat der Vorlesung Ihnen hier helfen kann, können Sie die Antwort ziemlich einfach finden*).

Lösung

Nach Satz 7.2 gibt es eine Bijektion von $\text{Hom}(V, V)$ nach $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{Z}/2)$. Somit gilt $|\text{Hom}(V, V)| = |\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{Z}/2)|$. Wir müssen also die Anzahl der 3×3 -Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Z}/2$ bestimmen.

Jeder der 9 Einträge einer 3×3 -Matrix über $\mathbb{Z}/2$ kann genau zwei Werte annehmen, nämlich 0 und 1. Denn $\mathbb{Z}/2$ hat nur die beiden Elemente 0 und 1. Die Anzahl der 3×3 -Matrizen über $\mathbb{Z}/2$ ist also $2^9 = 512$. Somit gilt $|\text{Hom}(V, V)| = 512$.

Zusatzaufgabe

Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgaben wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung präsentieren.

Aufgabe 8

Sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und V ein n -dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Z}/p$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Automorphismen von V gleich

$$(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \cdots (p^n - p^{n-1})$$

ist.

Lösung

Wir schreiben $GL(V)$ für die Menge der Automorphismen von V . Wir müssen zeigen, dass

$$|GL(V)| = (p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \cdots (p^n - p^{n-1})$$

gilt. Sei $(c_1, \dots, c_n)$ eine Basis von V .

Ist $\varphi \in GL(V)$, dann ist $(\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_n))$ eine Basis von V (siehe Lemma 6.23 (c)). Sei nun X die Menge der geordneten Basen von V . Wir betrachten die Abbildung

Die Abbildung

$$F : GL(V) \rightarrow X, \varphi \mapsto (\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_n)).$$

Wegen Lemma 6.22 ist F injektiv.

Wir zeigen nun, dass F auch surjektiv ist. Sei dazu $(b_1, \dots, b_n) \in X$. Es ist also $(b_1, \dots, b_n)$ eine geordnete Basis von V . Nach Lemma 6.22 existiert eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ mit $\varphi(c_i) = b_i$ für $1 \leq i \leq n$. Nach Lemma 6.23 (c) gilt $\varphi \in GL(V)$. Also $F(\varphi) = (b_1, \dots, b_n)$.

Wir haben gezeigt, dass F eine Bijektion ist. Folglich gilt $|GL(V)| = |X|$. Es reicht daher aus, zu zeigen, dass V genau

$$(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \cdots (p^n - p^{n-1})$$

geordnete Basen hat.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, Elemente $b_1, \dots, b_n \in V$ zu wählen, so dass $(b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V ist? Nach Korollar 3.56 ist dies äquivalent zu der Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, $(b_1, \dots, b_n)$ so zu wählen, dass die Vektoren $b_1, \dots, b_n$ linear unabhängig sind.

Stellen wir uns vor, wir wählen die Elemente $b_1, \dots, b_n$ in dieser Reihenfolge aus, also dass wir insbesondere mit b_1 anfangen. Wir überlegen uns zunächst, wie viele Möglichkeiten wir haben, b_1 so auszuwählen, dass b_1 linear unabhängig ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn b_1 nicht der Nullvektor 0_V ist.

Da nach Vorlesung V und $(\mathbb{Z}/p)^n$ isomorph sind, gilt $|V| = |(\mathbb{Z}/p)^n| = p^n$. Wir haben daher genau $p^n - 1$ Möglichkeiten, b_1 so auszuwählen, dass b_1 nicht der Nullvektor ist. Mit anderen Worten: Wir haben genau $p^n - 1$ Möglichkeiten, b_1 so auszuwählen, dass b_1 linear unabhängig ist.

Sei nun angenommen, dass $1 \leq i \leq n-1$ und dass wir $b_1, \dots, b_i$ so ausgewählt haben, dass die Vektoren $b_1, \dots, b_i$ linear unabhängig sind. Wir überlegen uns nun, wie viele Möglichkeiten wir haben, b_{i+1} so auszuwählen, dass die Vektoren $b_1, \dots, b_{i+1}$ immernoch linear unabhängig sind.

Wir behaupten, dass die Vektoren $b_1, \dots, b_{i+1}$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $b_{i+1} \notin \langle b_1, \dots, b_i \rangle$ gilt.

Nehmen wir dazu an, dass sie linear unabhängig sind. Nach Aufgabe 4 (a) auf Blatt 8 kann dann keiner der Vektoren eine Linearkombination der anderen sein. Damit ist insbesondere b_{i+1} keine Linearkombination der Vektoren $b_1, \dots, b_i$, womit $b_{i+1} \notin \langle b_1, \dots, b_i \rangle$ gilt.

Nehmen wir nun an, dass $b_{i+1} \in \langle b_1, \dots, b_i \rangle$ gilt. Wir müssen zeigen, dass die Vektoren $b_1, \dots, b_{i+1}$ linear unabhängig sind. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}/p$ mit $0_V = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{i+1} b_{i+1}$. Angenommen, es gilt $\lambda_{i+1} \neq 0$. Dann folgt $b_{i+1} = \lambda_{i+1}^{-1}(-b_1 - \dots - b_i) \in \langle b_1, \dots, b_i \rangle$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist, dass $b_{i+1} \notin \langle b_1, \dots, b_i \rangle$ gilt. Deshalb muss $\lambda_{i+1} = 0$

gelten. Damit gilt $0_V = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_i b_i$. Die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $b_1, \dots, b_i$ impliziert nun $\lambda_1 = \dots = \lambda_i = 0$. Somit sind die Vektoren $b_1, \dots, b_{i+1}$ linear unabhängig.

Um die Frage zu beantworten, wie viele Möglichkeiten es gibt, b_{i+1} so zu wählen, dass $b_1, \dots, b_{i+1}$ linear unabhängig sind, müssen wir uns also überlegen, wie viele Möglichkeiten es gibt, b_{i+1} so zu wählen, dass b_{i+1} nicht in $\langle b_1, \dots, b_i \rangle$ liegt. Es hat $\langle b_1, \dots, b_i \rangle$ Dimension i , also $\langle b_1, \dots, b_i \rangle \cong (\mathbb{Z}/p)^i$, also $|\langle b_1, \dots, b_i \rangle| = p^i$. Daher gibt es, $|V| - p^i = p^n - p^i$ Möglichkeiten, b_{i+1} zu wählen.

Fassen wir unsere Überlegungen zusammen: Wir haben $p^n - 1$ Möglichkeiten, b_1 so zu wählen, dass b_1 linear unabhängig ist. Nachdem b_1 gewählt wurde, gibt es $p^n - p$ Möglichkeiten, b_2 zu wählen. Nach Wahl von b_1 und b_2 gibt es noch $p^n - p^2$ Möglichkeiten, b_3 zu wählen. Und so geht es weiter bis zur Wahl von b_n . Die Anzahl geordneter Basen von V ist daher

$$(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \cdots (p^n - p^{n-1}).$$