

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der dreizehnten Übung. Der späteste Abgabetermin ist der 27.01 um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem dreizehnten Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 13* finden.

Erste Vorbereitungsaufgabe

Hier war eine zufällig generierte invertierbare 3×3 -Matrix über $\mathbb{R}$ gegeben und die Aufgabe bestand darin, ihr Inverses mithilfe des Gauß-Jacobi-Verfahrens zu bestimmen. Das Vorgehen hierbei können Sie Beispiel 7.20 aus dem Skript entnehmen (mit dem einzigen Unterschied, dass in der Vorbereitungsaufgabe über $\mathbb{R}$ gerechnet wird).

Zweite Vorbereitungsaufgabe

Die Aufgabenstellung lautete wie folgt:

Es sei V ein drei-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Basis $B_V = (v_1, v_2, v_3)$. Seien

$$\begin{aligned}w_1 &:= v_1 - 2v_2 - v_3, \\w_2 &:= 2v_1 - 5v_2 - 3v_3, \\w_3 &:= -v_1 + v_2 + v_3.\end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass $B'_V := (w_1, w_2, w_3)$ eine Basis von V ist. Dies dürfen Sie hier ohne Beweis verwenden (dennoch wäre es eine gute Übung für Sie, sich dies klarzumachen).

Wir definieren eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ durch

$$\begin{aligned}\varphi(v_1) &:= 2v_2 + 3v_3, \\ \varphi(v_2) &:= -4v_2 - 6v_3, \\ \varphi(v_3) &:= -2v_1.\end{aligned}$$

(Nach Lemma 6.22 reicht dies aus, um φ zu definieren.)

1. Bestimmen Sie $\text{Mat}(\varphi, B_V)$.
2. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $\text{Mat}(\text{id}_V, B'_V, B_V)$.

3. Nutzen Sie 1. und 2., um $\text{Mat}(\varphi, B'_V)$ zu bestimmen.

Lösung:

1. Nach Definition von φ gilt

$$\text{Mat}(\varphi, B_V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{id}_V(w_1) &= w_1 = v_1 - 2v_2 - v_3, \\ \text{id}_V(w_2) &= w_2 = 2v_1 - 5v_2 - 3v_3, \\ \text{id}_V(w_3) &= w_3 = -v_1 + v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\text{Mat}(\text{id}_V, B'_V, B_V) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Nach Abschnitt 7.4 (insbesondere Satz 7.22) gilt

$$\begin{aligned} \text{Mat}(\varphi, B'_V) &= \text{Mat}(\text{id}_V, B'_V, B_V)^{-1} \text{Mat}(\varphi, B_V) \text{Mat}(\text{id}_V, B'_V, B_V) \\ &= \text{Mat}(\text{id}_V, B_V, B'_V) \text{Mat}(\varphi, B_V) \text{Mat}(\text{id}_V, B'_V, B_V). \end{aligned}$$

Wir kennen bereits die Matrizen $\text{Mat}(\varphi, B_V)$ und $\text{Mat}(\text{id}_V, B'_V, B_V)$. Um $\text{Mat}(\varphi, B'_V)$ ausrechnen zu können, brauchen wir noch die Matrix $\text{Mat}(\text{id}_V, B'_V, B_V)^{-1}$. Diese stimmt mit $\text{Mat}(\text{id}_V, B_V, B'_V)$ überein.

Um sie auszurechnen, könnten wir also probieren, $\text{Mat}(\text{id}_V, B_V, B'_V)$ direkt zu bestimmen, oder wir berechnen etwa mit dem Gauß-Jacobi-Verfahren das Inverse von $\text{Mat}(\text{id}_V, B'_V, B_V)$. Ersteres mag in vielen Aufgaben einfacher sein, aber in dieser Aufgabe sieht das nicht danach aus. Deshalb berechnen wir $\text{Mat}(\text{id}_V, B'_V, B_V)^{-1}$ mithilfe des Gauß-Jacobi-Verfahrens und erhalten

$$\text{Mat}(\text{id}_V, B'_V, B_V)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\text{Mat}(\varphi, B'_V) &= \text{Mat}(\text{id}_V, B'_V, B_V)^{-1} \text{Mat}(\varphi, B_V) \text{Mat}(\text{id}_V, B'_V, B_V) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 39 & 96 & -25 \\ -17 & -42 & 11 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

mit Einträgen aus $\mathbb{Z}/7$. Nutzen Sie das Gauß-Jacobi-Verfahren, um zu zeigen, dass A invertierbar ist und um A^{-1} zu berechnen. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis für A^{-1} .

Lösung

Mit dem Gauß-Jacobi-Verfahren erhält man

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Ergebnis lässt sich verifizieren, indem man A mit der oben erhaltenen Matrix sowie die oben erhaltene Matrix mit A multipliziert und beobachtet, dass in beiden Fällen die Einheitsmatrix herauskommt.

Aufgabe 3

Sei V ein 4-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}/7$ und sei $\mathcal{B}_V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis von V . Wir definieren eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ durch

$$\begin{aligned}\varphi(v_1) &:= v_1 + 2v_3 + 6v_4, \\ \varphi(v_2) &:= 4v_1 + 4v_2 + 6v_3 + 2v_4, \\ \varphi(v_3) &:= 2v_1 + 4v_2 + 6v_3 + 6v_4, \\ \varphi(v_4) &:= 2v_3.\end{aligned}$$

Überprüfen Sie, ob φ ein Automorphismus ist. Wenn ja, geben Sie φ^{-1} an.

Lösung

Sei A wie in Aufgabe 2. Dann gilt

$$A^{-1} = \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V).$$

Es ist A^{-1} invertierbar, denn $A^{-1}A = I_4 = A^{-1}A$. Satz 7.11 impliziert, dass φ ein Isomorphismus und damit ein Automorphismus ist.

Nach Satz 7.11 gilt weiterhin $\text{Mat}(\varphi^{-1}, \mathcal{B}_V) = \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$. Damit ist φ^{-1} die lineare Abbildung von V nach V , die durch

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(v_1) &= 2v_1 + 3v_2 + 4v_3 + 5v_4, \\ \varphi^{-1}(v_2) &= v_1 + v_2 + v_3, \\ \varphi^{-1}(v_3) &= 4v_4, \\ \varphi^{-1}(v_4) &= v_1 + 3v_2 + 4v_3 + 6v_4\end{aligned}$$

festgelegt ist.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{E}_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und sei

$$\mathcal{B}_3 := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Nach Aufgabe 3 (i) auf Blatt 12 ist $\mathcal{B}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Weiterhin sei $\mathcal{E}_2$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und

$$\mathcal{B}_2 := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Es lässt sich zeigen, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Sie dürfen dies ohne Beweis verwenden.
Schließlich sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}.$$

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass φ linear ist.

- (i) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_3)$, $\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_3)$, $\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{E}_2, \mathcal{B}_2)$ und $\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_2, \mathcal{E}_2)$.
- (ii) Bestimmen Sie $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2)$. Nutzen Sie dies zusammen mit Ihren Ergebnissen aus (i), um auch $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_2)$, $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_2)$ und $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2)$ zu bestimmen.
- (iii) Sei

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie eines Ihrer Ergebnisse aus (ii), um $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(v) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu finden (*Hinweis: Verwenden Sie Bemerkung 7.3.*).

Lösung

- (i) Es gilt

$$\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{E}_2, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_2, \mathcal{E}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Es gilt

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Abschnitt 7.4 gilt weiterhin

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_2) = \text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_2, \mathcal{E}_2)^{-1} \text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_2) = \text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2) \text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) = \text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_2, \mathcal{E}_2)^{-1} \text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2) \text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) Wir schreiben $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ und $\mathcal{B}_2 = (b_1, b_2)$. Dann gilt $v = 2e_1 + 9e_2 + 3e_3$. Wir berechnen

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 7.3 sagt uns nun, dass

$$\varphi(v) = \frac{21}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2.$$

Dies können wir auch durch direktes Nachrechnen verifizieren, denn nach Definition von φ gilt

$$\varphi(v) = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Andererseits gilt auch

$$\frac{21}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 = \frac{21}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Um die Werte $\frac{21}{2}$ und $\frac{1}{2}$ zu erhalten, könnte man auch $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2)$ heranziehen. Als Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{B}_3$ lässt sich v wie folgt darstellen:

$$v = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen nun

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wieder sagt uns Bemerkung 7.3, dass

$$\varphi(v) = \frac{21}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2.$$

Aufgabe 5

Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sei V ein Vektorraum über K mit Basis $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$. Für alle $1 \leq i, j \leq n$ sei ein $a_{ij} \in K$ gegeben. Für $1 \leq j \leq n$ definieren wir

$$w_j := \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $(w_1, \dots, w_n)$ ist eine Basis von V .
- (ii) Die Matrix $A := (a_{ij})$ ist invertierbar.

Hinweis: Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Was hat diese Abbildung mit A zu tun?

Lösung

Sei φ die in dem Hinweis gegebene Abbildung. Es gilt

$$A = \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V).$$

Nach Lemma 6.23 ist $(w_1, \dots, w_n)$ genau dann eine Basis von V , wenn φ ein Isomorphismus ist. Und nach Satz 7.11 ist φ genau dann ein Isomorphismus, wenn A invertierbar ist. Somit sind (i) und (ii) äquivalent.

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 03.02.2022, 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}/5$ und sei $\mathcal{B}_V = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V . Wir definieren eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ durch

$$\begin{aligned}\varphi(v_1) &:= v_1 + 3v_3, \\ \varphi(v_2) &:= 2v_1 + v_2 + v_3, \\ \varphi(v_3) &:= 4v_1 + v_2.\end{aligned}$$

- (i) Bestimmen Sie $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)$.
- (ii) Prüfen Sie, ob $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)$ invertierbar ist und geben Sie ggf. $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)^{-1}$ an.
- (iii) Ist φ ein Automorphismus von V ? Wenn ja, geben Sie φ^{-1} an.

Lösung

(i) Es gilt

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Unter Anwendung des Gauß-Jacobi-Verfahrens lässt sich zeigen, dass $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)$ invertierbar ist mit Inversem

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Da $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)$ invertierbar ist, ist φ gemäß Satz 7.11 ein Automorphismus von V . Nach Satz 7.11 gilt außerdem $\text{Mat}(\varphi^{-1}, \mathcal{B}_V) = \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)^{-1}$. Damit können wir die Bilder von v_1, v_2, v_3 aus der in (ii) berechneten Matrix $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)^{-1}$ ablesen. Nämlich gilt

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(v_1) &= 3v_1 + v_2 + 4v_3, \\ \varphi^{-1}(v_2) &= 3v_1 + v_2 \\ \varphi^{-1}(v_3) &= v_1 + 3v_2 + 2v_3.\end{aligned}$$

Nach Lemma 6.22 ist φ^{-1} dadurch eindeutig festgelegt.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{E}_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und sei

$$\mathcal{B}_3 := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathcal{B}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Sei weiterhin

$$\mathcal{E}_4 := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\mathcal{B}_4 := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Nach Aufgabe 5 (i) auf Blatt 1 ist $\mathcal{E}_4$ eine Basis von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass auch $\mathcal{B}_4$ eine Basis von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ist.

Schließlich sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + z & y \\ x + y & 4y - 3z \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass φ linear ist.

- (i) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_3)$, $\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_3)$, $\text{Mat}(\text{id}_{\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}, \mathcal{E}_4, \mathcal{B}_4)$ und $\text{Mat}(\text{id}_{\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}, \mathcal{B}_4, \mathcal{E}_4)$.
- (ii) Berechnen Sie $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4)$. Nutzen Sie dies zusammen mit Ihren Ergebnissen aus (i), um auch $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_4)$, $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_4)$ und $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4)$ zu bestimmen.
- (iii) Sei

$$v := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie eines Ihrer Ergebnisse aus (ii), um $\varphi(v)$ als eine Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{B}_4$ zu schreiben (*Hinweis: Nutzen Sie Bemerkung 7.3.*)).

Lösung

- (i) Es gilt

$$\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{Mat}(\text{id}_{\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}, \mathcal{E}_4, \mathcal{B}_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Mat}(\text{id}_{\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}, \mathcal{B}_4, \mathcal{E}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Schreibe $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ und $\mathcal{E}_4 = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$. Es gilt

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2e_{11} + e_{21}.$$

Ähnlich erhält man

$$\varphi(e_2) = e_{12} + e_{21} + 4e_{22} \text{ und } \varphi(e_3) = e_{11} - 3e_{22}.$$

Damit erhalten wir

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen nun Abschnitt 7.4, um die anderen gesuchten Matrizen zu ermitteln. Was in Abschnitt 7.4 als V bezeichnet wird, ist im Kontext dieser Aufgabe $\mathbb{R}^3$. Genauso entspricht das W aus Abschnitt 7.4 in dieser Aufgabe $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Ebenso entspricht $\mathcal{B}_V$ aus Abschnitt 7.4 der Basis $\mathcal{E}_3$, während $\mathcal{B}'_V$ hier $\mathcal{B}_3$ entspricht. Genauso entspricht $\mathcal{B}_W$ der Basis $\mathcal{E}_4$ und die Basis $\mathcal{B}'_W$ entspricht der Basis $\mathcal{B}_4$. Um die drei gesuchten Matrizen zu berechnen, können wir damit die in Abschnitt 7.4 ermittelten Formeln heranziehen. Es gilt

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_4) = \text{Mat}(\text{id}_{\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}, \mathcal{E}_4, \mathcal{B}_4) \text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_4) = \text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4) \text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4) = \text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_4) \text{Mat}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_3, \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Es ist $v = 5e_1 + 2e_2 + 0e_3$. Der Vektor, den wir erhalten, wenn wir die Koeffizienten dieser Linearkombination untereinander schreiben, ist v selbst. Nach Bemerkung 7.3 erhalten wir die Koeffizienten der $\varphi(v)$ darstellenden Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{B}_4$ also, indem wir $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_4)$ mit v multiplizieren. Berechne also

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_3, \mathcal{B}_4)v = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Mit $\mathcal{B}_4 = (b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22})$ gilt also nach Bemerkung 7.3 $\varphi(v) = 8b_{11} - 5b_{12} - b_{21} + 8b_{22}$. Das könnte man auch durch eine Probe bestätigen, indem man beide Seiten per Hand ausrechnet.

Man könnte die Aufgabe auch anders angehen. Schreiben wir $\mathcal{B}_3 = (b_1, b_2, b_3)$, so gilt $v = 2b_1 + 3b_3$. Der Vektor, den wir erhalten, wenn wir die Koeffizienten dieser Linearkombination untereinander schreiben, ist gerade $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Nach Bemerkung 7.3 erhalten wir die Koeffizienten der $\varphi(v)$ darstellenden Linearkombination von $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$, indem wir

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

berechnen. Wieder sagt uns Bemerkung 7.3, dass $\varphi(v) = 8b_{11} - 5b_{12} - b_{21} + 8b_{22}$. Und das stimmt mit unserem Ergebnis von oben überein.

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei V ein zweidimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und sei $\mathcal{B}_V = (v_1, v_2)$ eine Basis von V . Sei $\varphi : V \rightarrow V$ linear und $A := \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)$. Es gelte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bestimmen Sie $\varphi(v_1 + v_2)$.
- (ii) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}'_V$ von V , so dass

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}'_V) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Wenn Sie Kapitel 7 aufmerksam gelesen haben und insbesondere die Abschnitten 7.1 und 7.4 gut verstanden haben, kriegen Sie das hin!

Lösung

- (i) Sei $w := v_1 + v_2$. Wir haben w als Linearkombination von v_1 und v_2 gegeben. Schreiben wir die Koeffizienten dieser Linearkombination untereinander, erhalten wir den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nach Bemerkung 7.3 erhalten wir die Koeffizienten der $\varphi(v)$ darstellenden Linearkombination von v_1 und v_2 , indem wir $A = \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V)$ mit dem obigen Vektor multiplizieren. Wir berechnen also

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Nach Bemerkung 7.3 gilt also $\varphi(v_1) = 8v_1 + 5v_2$.

(ii) Setze $w_1 := 2v_1 + v_2$ und $w_2 := 5v_2$. Da die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist (Ihre Inverse können Sie unschwer ermitteln), ist $\mathcal{B}'_V := (w_1, w_2)$ nach Aufgabe 5 eine Basis von V .

Es gilt

$$\text{Mat}(\text{id}_V, \mathcal{B}'_V, \mathcal{B}_V) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nach Abschnitt 7.4 (insbesondere Satz 7.22 (b)) gilt

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}'_V) = \text{Mat}(\text{id}_V, \mathcal{B}'_V, \mathcal{B}_V)^{-1} \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V) \text{Mat}(\text{id}_V, \mathcal{B}'_V, \mathcal{B}_V).$$

Die Basis $\mathcal{B}'_V = (w_1, w_2)$ hat also die gewünschte Eigenschaft.

Zusatzaufgabe

Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgabe wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung präsentieren.

Aufgabe 9

Zum Verschlüsseln einer Nachricht kann man folgendes Verfahren verwenden. Den 26 Buchstaben des Alphabets werden Zahlen von 0 bis 25 zugeordnet:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
19	2	21	0	4	7	6	9	17	24	11	15	14

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	12	16	18	1	25	20	3	22	5	8	23	10

Der Klartext (z. B. ALGEBRA) wird in Blöcke zu je zwei Buchstaben unterteilt, wobei man nach Bedarf eventuell noch einen Buchstaben (etwa X) hinzufügt: Al GE BR AX. Jedem Buchstabenpaar entspricht nach der obigen Tabelle ein gewisses Zahlenpaar (a_1, a_2) , dem man mittels

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

ein anderes Paar (b_1, b_2) zuordnen kann, wobei wir alle oben vorkommenden Matrixeinträge als Elemente des Rings $\mathbb{Z}/26$ auffassen. Auf diese Weise lässt sich ALGEBRA zu SFDOLMBH codieren.

- (i) Decodieren Sie SIVNXBMHNOTE.
- (ii) Geben Sie eine Bedingung an die Matrix $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}/26)$ an, damit jede durch

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

codierte Nachricht entschlüsselt werden kann.

Lösung

- (i) Über $\mathbb{Z}/26$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$ invertierbar mit

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}.$$

Die Decodierungsformel lautet daher

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Hierbei sind alle Matrixeinträge als Elemente von $\mathbb{Z}/26$ aufzufassen. Auf diese Weise lässt sich SIVNXBMHNOTE zu KRYPTOLOGIE decodieren.

- (ii) Die Matrix B muss invertierbar sein.