

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der zweiten Präsenzübung. Der späteste Abgabetermin ist der 27.10.2021 um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem zweiten Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner Hausaufgaben unter der Überschrift Vorbereitungsaufgaben für Übung 2 finden.

In Opal finden sich unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 2* zwei Aufgaben. Die erste davon lautet wie folgt:

Sei M die Menge der Einwohner der Bundesrepublik Deutschland. Wir definieren Relationen $\sim_1$, $\sim_2$ und $\sim_3$ auf M durch

- $x \sim_1 y \Leftrightarrow x$ und y haben ihren ersten Wohnsitz in derselben Stadt,
- $x \sim_2 y \Leftrightarrow x$ ist die Mutter von y ,
- $x \sim_3 y \Leftrightarrow x$ und y haben einen Altersunterschied von maximal 5 Jahren.

Entscheiden Sie per Drag & Drop für jede der Relationen, welche der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv sie hat.

Da jeder in derselben Stadt seinen ersten Wohnsitz hat wie er selbst, gilt $x \sim_1 x$ für alle $x \in M$. Somit ist $\sim_1$ reflexiv.

Seien x und y Elemente von M mit $x \sim_1 y$. Dann haben x und y ihren ersten Wohnsitz in derselben Stadt. Wir können genauso sagen, dass y und x ihren ersten Wohnsitz in derselben Stadt haben. Nach Definition von $\sim_1$ gilt also $y \sim_1 x$. Aus $x \sim_1 y$ folgt also $y \sim_1 x$. Somit ist $\sim_1$ symmetrisch.

Seien nun $x, y, z \in M$, so dass $x \sim_1 y$ und $y \sim_1 z$. Dann haben x und y denselben Erstwohnsitz und es haben y und z ebenso denselben Erstwohnsitz. Damit haben auch x und z denselben Erstwohnsitz. Folglich gilt $x \sim_1 z$. Somit ist $\sim_1$ transitiv.

Die Relation $\sim_1$ hat also alle drei Eigenschaften (und ist somit eine Äquivalenzrelation).

Machen wir uns nun über die Relation $\sim_2$ Gedanken. Da niemand die Mutter von sich selbst sein kann, gibt es kein $x \in M$ mit $x \sim_2 x$. Damit ist $x \sim_2 x$ erst recht nicht für alle $x \in M$ erfüllt, sodass $\sim_2$ nicht reflexiv ist.

Sind x, y Elemente von M mit $x \sim_2 y$, so ist x die Mutter von y . Damit kann aber y nicht die Mutter von x sein, womit $y \sim_2 x$ nicht gilt. Insbesondere impliziert $x \sim_2 y$ nicht, dass $y \sim_2 x$ gilt. Folglich ist $\sim_2$ nicht symmetrisch.

Sind $x, y, z \in M$ mit $x \sim_2 y$ und $y \sim_2 z$, so ist x die Mutter von y und y die Mutter von z . Damit ist x zwar eine Großmutter, aber nicht die Mutter, von z , womit nicht $x \sim_2 z$ gilt. Aus $x \sim_2 y$ und $y \sim_2 z$ folgt also nicht $x \sim_2 z$. Somit ist $\sim_2$ nicht transitiv.

Die Relation $\sim_2$ hat also keine der drei Eigenschaften.

Gucken wir uns nun die Relation $\sim_3$ an. Da jeder zu sich selbst einen Altersunterschied von 0 und damit von höchstens 5 Jahren hat, gilt $x \sim_3 x$ für alle $x \in M$. Somit ist $\sim_3$ reflexiv.

Seien $x, y \in M$ mit $x \sim_3 y$. Dann haben x und y einen Altersunterschied von höchstens 5 Jahren. Genauso können wir sagen, dass y und x einen Altersunterschied von höchstens 5 Jahren haben. Somit gilt $y \sim_3 x$. Folglich ist $\sim_3$ symmetrisch.

Die Relation $\sim_3$ ist nicht transitiv. Nehmen wir z. B. einen 20-jährigen x , eine 25-jährige y und eine 28-jährige z . Nach Definition von $\sim_3$ gilt dann $x \sim_3 y$ und $y \sim_3 z$, aber nicht $x \sim_3 z$.

Die zweite in Opal unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 2* zu findende Aufgabe lautet wie folgt

*Ist $\sim$ eine Relation auf einer Menge M und ist x ein Element von M , so schreiben wir $B(x)$ für die Menge aller Elemente y von M , so dass **nicht** $x \sim y$ gilt. Wählen Sie aus, welche Aussagen für eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M stets richtig sind.*

- (1) *Wenn es ein $x \in M$ gibt, so dass $B(x)$ eine Äquivalenzklasse ist, so hat $\sim$ nur zwei Äquivalenzklassen.*
- (2) *Für jedes $x \in M$ ist die Menge $B(x)$ eine Äquivalenzklasse von $\sim$.*
- (3) *Wenn $\sim$ nur zwei Äquivalenzklassen hat, so ist $B(x)$ für jedes $x \in M$ eine Äquivalenzklasse.*
- (4) *Für alle $x_1, x_2, x_3 \in M$ gilt: Wenn weder $x_1 \sim x_2$ noch $x_2 \sim x_3$ gilt, so gilt auch nicht $x_1 \sim x_3$.*

Die Aussage in (1) ist richtig. Sei nämlich $x \in M$, so dass $B(x)$ eine Äquivalenzklasse von $\sim$ ist. Wir zeigen, dass $\sim$ genau zwei Äquivalenzklassen hat. Es sind $[x]$ und $B(x)$ zwei verschiedene Äquivalenzklassen von $\sim$. Angenommen, es gäbe eine weitere Äquivalenzklasse J von $\sim$. Nach Lemma 1.6 (e) haben zwei Äquivalenzklassen entweder eine leere Schnittmenge oder sie sind gleich. Da J eine Äquivalenzklasse von $\sim$ ist, gilt $J \neq \emptyset$ (siehe Lemma 1.6 (a)). Wegen $M = [x] \cup B(x)$ folgt, dass J entweder ein Element von $[x]$ oder ein Element von $B(x)$ enthält. Folglich hat J also entweder mit $[x]$ oder mit $B(x)$ eine nichtleere Schnittmenge und ist also entweder gleich $[x]$ oder gleich $B(x)$. Damit sind $[x]$ und $B(x)$ die einzigen Äquivalenzklassen von $\sim$. Es gibt also genau zwei.

Die Aussage in (2) ist falsch. Um dies zu sehen, betrachten wir den Fall, dass $\sim$ mindestens drei Äquivalenzklassen hat (das trifft z. B. auf die Äquivalenzrelation $\sim_1$ aus der zuvor behandelten Aufgabe zu). Dann existieren $x, y, z \in M$, so dass die Äquivalenzklassen $[x]$, $[y]$

und $[z]$ paarweise verschieden sind. Wegen $[y] \neq [x] \neq [z]$ gilt $x \not\sim y$ und $x \not\sim z$ (siehe Lemma 1.6 (b)), also $y, z \in B(x)$. Wegen $[y] \neq [z]$ gilt $y \not\sim z$ (ebenfalls nach Lemma 1.6 (b)). Damit kann $B(x)$ keine Äquivalenzklasse sein, denn nach Lemma 1.6 (c) stehen je zwei Elemente einer Äquivalenzklasse zueinander in Relation.

Die Aussage in (3) ist richtig: Angenommen, $\sim$ hat nur zwei Äquivalenzklassen. Sei $x \in M$. Es ist $[x]$ die Menge aller Elemente von M , die zu x in Relation stehen. Und es ist $B(x)$ die Menge aller Elemente von M , die dies nicht tun. Daraus folgt $B(x) = M \setminus [x]$. Sei J die Äquivalenzklasse von $\sim$ mit $J \neq [x]$. Wegen $J \cap [x] = \emptyset$ (siehe Lemma 1.6 (e)) gilt $J \subseteq M \setminus [x] = B(x)$. Da jedes Element von $B(x)$ in einer Äquivalenzklasse von $\sim$, aber eben nicht in $[x]$, liegt, gilt auch $B(x) \subseteq J$. Es folgt $B(x) = J$. Somit ist $B(x)$ eine Äquivalenzklasse von $\sim$.

Die Aussage in (4) ist falsch: Sei dazu der Fall betrachtet, dass $\sim$ mindestens zwei Äquivalenzklassen hat. Dann existieren $x, y \in M$ mit $x \not\sim y$. Setze nun $x_1 := x, x_2 := y$ und $x_3 := x$. Dann gilt weder $x_1 \sim x_2$ noch $x_2 \sim x_3$, aber es gilt $x_1 \sim x_3$.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Geben Sie mit kurzer Begründung an, welche der folgenden Vorschriften eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{N}$ definieren.

(i) $x \sim y \Leftrightarrow x, y$ gerade.

(ii) $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ gerade.

(iii) $x \sim y \Leftrightarrow x + y$ gerade.

(iv) $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ ungerade.

(v) $x \sim y \Leftrightarrow x + y$ ungerade.

Die Relation in (i) ist keine Äquivalenzrelation. Da z. B. 1 ungerade ist, gilt $1 \not\sim 1$. Damit ist die Relation nicht reflexiv.

Die Relation in (ii) ist eine Äquivalenzrelation: Für $x \in \mathbb{N}$ gilt $0 = x - x$. Insbesondere ist $x - x$ gerade, sodass $x \sim x$. Die Relation ist also reflexiv. Seien $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \sim y$. Dann ist $x - y$ gerade. Hiermit ist auch $-(x - y) = y - x$ gerade, sodass $y \sim x$. Folglich ist $\sim$

symmetrisch. Seien nun $x, y, z \in \mathbb{N}$, so dass $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann sind $x - y$ und $y - z$ gerade. Als Summe zweier gerader Zahlen ist auch $(x - y) + (y - z) = x - z$ gerade. Damit gilt $x \sim z$. Somit ist $\sim$ transitiv. Also ist $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv und damit eine Äquivalenzrelation.

Die Relation in (iii) ist eine Äquivalenzrelation. Für $x \in \mathbb{N}$ ist $x + x = 2x$ gerade, womit $x \sim x$. Somit ist $\sim$ reflexiv. Gilt $x \sim y$, so ist $x + y$ gerade; damit ist auch $y + x$ gerade, womit $y \sim x$ gilt. Folglich ist $\sim$ symmetrisch. Seien nun $x, y, z \in M$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann sind $x + y$ und $y + z$ gerade. Da die Summe einer ungeraden und einer geraden natürlichen Zahl ungerade ist, sind x und y entweder beide gerade oder beide ungerade. Genauso sind y und z entweder beide gerade oder beide ungerade. Daraus folgt, dass auch x und z entweder beide gerade oder beide ungerade sind, womit $x + z$ gerade ist. Es gilt also $x \sim z$. Folglich ist $\sim$ transitiv. Somit ist $\sim$ sowohl reflexiv, symmetrisch als auch transitiv und damit eine Äquivalenzrelation.

Die Relation in (iv) ist keine Äquivalenzrelation. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich $0 = n - n$ und damit $n \not\sim n$, sodass $\sim$ nicht reflexiv ist.

Die Relation in (v) ist ebenfalls keine Äquivalenzrelation. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich $2n = n + n$ und damit $n \not\sim n$. Somit ist $\sim$ nicht reflexiv.

Aufgabe 3

Sei M die Menge der Studierenden an der TU Dresden. Geben Sie Beispiele für Relationen auf M an, die

- (1) reflexiv, symmetrisch und transitiv,
- (2) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv,
- (3) symmetrisch, transitiv, aber nicht reflexiv,
- (4) reflexiv, transitiv, aber nicht symmetrisch,
- (5) weder reflexiv, noch symmetrisch, noch transitiv

sind.

- (1) Die Relation $\sim$ auf M mit

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ haben sich am selben Tag immatrikuliert}$$

ist reflexiv, symmetrisch und transitiv (also eine Äquivalenzrelation).

- (2) Die Relation $\sim$ auf M mit

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ haben sich schon mal zusammen in einem Raum aufgehalten}$$

ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv.

(3) Die Relation $\sim$ auf M mit

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ studieren beide Mathematik}$$

ist symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv.

(4) Die Relation $\sim$ auf M mit

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ ist mindestens so alt wie } y$$

ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch.

(5) Die Relation $\sim$ auf M mit

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ schreibt regelmäßig Hausaufgaben von } y \text{ ab}$$

ist weder reflexiv, noch symmetrisch, noch transitiv.

Aufgabe 4

Beweisen Sie Lemma 1.4 aus der Vorlesung: Die Relation

$$R := \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}, \text{ so dass } n \mid m\}$$

ist eine reflexive und transitive Relation auf $\mathbb{Z}$. Weiter ist

$$R_0 := \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}_0, \text{ so dass } n \mid m\}$$

eine Ordnung auf $\mathbb{N}_0$.

Wir zeigen zuerst, dass R reflexiv und transitiv ist.

Für $z \in \mathbb{Z}$ gilt $z = z \cdot 1$ und somit $z \mid z$. Folglich gilt zRz . Die Relation R ist also reflexiv.

Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit xRy und yRz . Dann gilt $x \mid y$ und $y \mid z$. Es existieren also ganze Zahlen r und s , so dass $y = xr$ und $z = ys$. Nun gilt $z = ys = (xr)s = x(rs)$, also $x \mid z$. Es folgt xRz . Die Relation R ist somit transitiv.

Wir zeigen nun, dass R_0 eine Ordnung ist. Gemäß der Definition einer Ordnung müssen wir dazu nachweisen, dass R_0 reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Die Reflexivität bzw. die Transitivität von R_0 folgt aus der Reflexivität bzw. der Transitivität von R . Zu zeigen bleibt die Antisymmetrie. Seien dazu $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit nR_0m und mR_0n . Dann gilt $n \mid m$ und $m \mid n$. Folglich existieren ganze Zahlen r und s , so dass $m = nr$ und $n = ms$. Es gilt $m = nr = (ms)r = m(sr)$. Wenn m gleich 0 ist, gilt auch $n = ms = 0$. Andernfalls muss $sr = 1$ gelten, was $s = r = 1$ und damit $m = nr = n \cdot 1 = n$ impliziert. Aus nR_0m und mR_0n folgt also $n = m$. Damit ist R_0 antisymmetrisch.

Aufgabe 5

Seien R und S Äquivalenzrelationen auf einer Menge M .

- (i) Zeigen Sie, dass $R \cap S$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.
- (ii) Beschreiben Sie anhand eines geeigneten Beispiels, wie sich die Äquivalenzklassen von R bzw. S durch die Durchschnittsbildung verfeinern.
- (iii) Ist $R \cup S$ auch eine Äquivalenzrelation auf M ? Wenn ja, beweisen sie es. Wenn nein, geben sie ein Gegenbeispiel an.

- (i) Als Relationen auf M sind R und S Teilmengen von $M \times M$. Damit ist auch $R \cap S$ eine Teilmenge von $M \times M$, also eine Relation auf M . Um zu zeigen, dass $R \cap S$ sogar eine Äquivalenzrelation auf M ist, weisen wir nach, dass $R \cap S$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Sei $x \in M$. Da R und S als Äquivalenzrelationen reflexiv sind, gilt $(x, x) \in R$ und $(x, x) \in S$, also $(x, x) \in R \cap S$. Folglich ist $R \cap S$ reflexiv.

Seien x und y Elemente von M mit $(x, y) \in R \cap S$. Dann gilt auch $(x, y) \in R$ und da R als Äquivalenzrelation symmetrisch ist, folgt $(y, x) \in R$. Analog folgt $(y, x) \in S$. Somit gilt $(y, x) \in R \cap S$. Folglich ist $R \cap S$ symmetrisch.

Seien nun $x, y, z \in M$, so dass $(x, y) \in R \cap S$ und $(y, z) \in R \cap S$. Dann gilt auch $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$. Da R als Äquivalenzrelation transitiv ist, folgt $(x, z) \in R$. Analog sieht man, dass $(x, z) \in S$. Es gilt also $(x, z) \in R \cap S$. Damit ist $R \cap S$ transitiv.

- (ii) Sei M die Menge der Studierenden an einer Universität. Wir nehmen an, dass man an dieser Universität nur für einen Studiengang eingeschrieben sein kann, d. h. ein Doppelstudium ist nicht möglich. Wir definieren die folgenden Relationen auf M :

$$R := \{(x, y) \mid x, y \in M, x \text{ und } y \text{ studieren denselben Studiengang}\},$$
$$S := \{(x, y) \mid x, y \in M, x \text{ und } y \text{ sind im selben Fachsemester}\}.$$

Es lässt sich leicht einsehen, dass R und S Äquivalenzrelationen auf M sind. Die Äquivalenzklassen von R sind die Teilmengen von M , die aus den Studierenden eines bestimmten an der Universität angebotenen Studiengangs bestehen. Die Äquivalenzklassen von S sind die Teilmengen von M , die aus den Studierenden eines bestimmten Fachsemesters bestehen.

Es gilt

$$R \cap S = \{(x, y) \mid x, y \in M \wedge (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S\}$$
$$= \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind im selben Studiengang und Semester}\}.$$

Die Äquivalenzklassen von $R \cap S$ sind die Teilmengen von M , die aus allen Studierenden bestehen, die einen bestimmten an der Universität angebotenen Studiengang in einem bestimmten Fachsemester studieren. Z. B. bilden die Mathematikstudierenden im ersten Semester eine Äquivalenzklasse von $R \cap S$ (sofern die Universität Mathematik als Fach anbietet).

Die Äquivalenzklassen von R und S haben sich durch die Durchschnittsbildung also verfeinert. Z. B. bilden die Mathematikstudierenden der Universität (wenn wir annehmen, dass Mathematik dort als Studiengang angeboten wird) eine Äquivalenzklasse von R . Diese Äquivalenzklasse ist eine Vereinigung mehrerer Äquivalenzklassen von $R \cap S$, da die Mathematikstudierenden in einem bestimmten Semester jeweils eine Äquivalenzklasse von $R \cap S$ bilden. Ebenso bilden z. B. die Erstsemester eine Äquivalenzklasse von S . Diese Äquivalenzklasse ist eine Vereinigung mehrerer Äquivalenzklassen von $R \cap S$, da die Erstsemester in einem bestimmten Studiengang jeweils eine Äquivalenzklasse von $R \cap S$ bilden.

- (iii) Im Allgemeinen ist $R \cup S$ keine Äquivalenzrelation auf M , wenn R und S Äquivalenzrelationen auf M sind. Um dies zu sehen, bleiben wir in dem Beispiel aus (ii). In diesem Beispiel gilt

$$\begin{aligned} R \cup S &= \{(x, y) \mid x, y \in M, (x, y) \in R \vee (x, y) \in S\} \\ &= \{(x, y) \mid x, y \in M, x, y \text{ sind im selben Studiengang oder selben Semester}\}. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass die in (ii) betrachtete Universität mindestens zwei verschiedene Studiengänge anbietet, sagen wir Mathematik und Biologie. Nehmen wir außerdem an, dass es einen Erstsemester x im Studiengang Mathematik, einen Drittsemester y im Studiengang Mathematik und einen Drittsemester z im Studiengang Biologie gibt. Dann gilt $x(R \cup S)y$ und $y(R \cup S)z$, aber nicht $x(R \cup S)z$. Somit ist $R \cup S$ nicht transitiv, also auch keine Äquivalenzrelation.

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 03.11.2021, 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Untersuchen Sie jeweils, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist. Falls dies der Fall ist, geben Sie die Äquivalenzklassen von $\sim$ auf M an.

- (i) M sei die Menge aller deutschen Städte; für $x, y \in M$ gilt $x \sim y$ genau dann, wenn x und y im selben Bundesland liegen.

(ii) M sei die Menge aller deutschen Städte; für $x, y \in M$ gilt $x \sim y$ genau dann, wenn x oder y in Sachsen liegt.

(iii) $M = \mathbb{Z}$, für $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $xy > 0$.

(iv) $M = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; für $x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $xy > 0$.

Die Relation in (i) ist eine Äquivalenzrelation: Für $x \in M$ gilt $x \sim x$, da jede Stadt in demselben Bundesland liegt wie sie selbst. Somit ist $\sim$ reflexiv. Sind $x, y \in M$ mit $x \sim y$, so liegen x und y im selben Bundesland, womit auch y und x im selben Bundesland liegen, sodass $y \sim x$ gilt. Die Relation $\sim$ ist also symmetrisch. Sind $x, y, z \in M$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, so liegen x und y bzw. y und z im selben Bundesland. Damit liegen auch x und z im selben Bundesland, womit $x \sim z$ gilt. Die Relation $\sim$ ist also transitiv.

Die Relation $\sim$ hat genau 16 Äquivalenzklassen. Für jedes Bundesland B ist die Menge aller Städte in B eine Äquivalenzklasse von $\sim$.

Die Relation in (ii) ist keine Äquivalenzrelation. Ist nämlich x eine deutsche Stadt außerhalb Sachsens, so gilt $x \not\sim x$ (d.h., es gilt nicht $x \sim x$). Damit ist die Relation nicht reflexiv. Auch ist die Relation nicht transitiv, denn z. B. steht Hannover in Relation zu Dresden und Dresden in Relation zu Frankfurt, während Hannover nicht in Relation zu Frankfurt steht.

Die Relation in (iii) ist keine Äquivalenzrelation. Wegen $0 = 0 \cdot 0$ gilt $0 \not\sim 0$, womit $\sim$ nicht reflexiv ist.

Die Relation in (iv) ist eine Äquivalenzrelation: Für $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt $x \sim x$, denn $x \cdot x = x^2 > 0$. Somit ist $\sim$ reflexiv. Sind $x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $x \sim y$, so gilt $xy > 0$. Wegen $yx = xy$ folgt $yx > 0$ und damit $y \sim x$. Folglich ist $\sim$ symmetrisch. Seien nun $x, y, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann gilt $xy > 0$ und $yz > 0$. Hieraus folgt $xzy^2 = xy^2z = (xy)(yz) > 0$. Wegen $y^2 > 0$ muss also $xz > 0$ gelten. Folglich gilt $x \sim z$. Damit ist $\sim$ transitiv.

Wir bestimmen nun die Äquivalenzklassen von $\sim$. Die Äquivalenzklasse $[1]$ besteht aus allen $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $1 \sim z$, also aus allen $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $z = 1 \cdot z > 0$. Folglich ist $\mathbb{N}$ eine Äquivalenzklasse von $\sim$.

Die Äquivalenzklasse $[-1]$ besteht aus allen $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $-z = (-1) \cdot z > 0$, also aus allen negativen ganzen Zahlen. Somit bilden die negativen ganzen Zahlen eine Äquivalenzklasse von $\sim$.

Da die Vereinigung der gefundenen Äquivalenzklassen bereits $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist, kann es keine weiteren Äquivalenzklassen geben. Somit sind die Menge $\mathbb{N}$ und die Menge der negativen ganzen Zahlen genau die Äquivalenzklassen von $\sim$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 1.8 aus der Vorlesung: Sei $\mathcal{P}$ eine Partition auf M . Sei

$$R := \{(x, y) \mid \text{Es gibt ein } N \in \mathcal{P}, \text{ so dass } x, y \in N\}.$$

Dann ist R eine Äquivalenzrelation auf M und die Menge der Äquivalenzklassen von R ist $\mathcal{P}$.

Nach der Definition einer Partition gilt

$$\bigcup \mathcal{P} = M,$$

wobei

$$\bigcup \mathcal{P} = \{x \mid \text{es existiert ein } N \in \mathcal{P} \text{ mit } x \in N\}.$$

Sei $x \in M$. Aus dem eben Gesagten folgt, dass ein $N \in \mathcal{P}$ existiert mit $x \in N$. Folglich gilt $(x, x) \in R$. Damit ist R reflexiv.

Seien nun $x, y \in M$ mit $(x, y) \in R$. Dann gibt es ein $N \in \mathcal{P}$ mit $x, y \in N$. Damit gilt auch $y, x \in N$. Es folgt $(y, x) \in R$. Somit ist R symmetrisch.

Seien nun $x, y, z \in M$ mit $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$. Dann gibt es ein $N \in \mathcal{P}$ mit $x, y \in N$ und ein $L \in \mathcal{P}$ mit $y, z \in L$. Nun gilt $y \in N \cap L$, also $N \cap L \neq \emptyset$. Nach Definition einer Partition folgt daraus $N = L$. Es gilt nun $x \in N$ und $z \in L = N$, also $x, z \in N$ und damit $(x, z) \in R$. Folglich ist R transitiv.

Als reflexive, symmetrische, transitive Relation ist R eine Äquivalenzrelation auf M .

Es bleibt zu zeigen, dass die Menge der Äquivalenzklassen von R gleich $\mathcal{P}$ ist. Dazu überlegen wir uns zunächst, dass es zu jedem $x \in M$ genau ein $N_x \in \mathcal{P}$ mit $x \in N_x$ gibt. Sei dazu $x \in M$. Dass ein $N_x \in \mathcal{P}$ mit $x \in N_x$ existiert, folgt aus der Reflexivität von R . Wir zeigen nun, dass N_x eindeutig ist. Sei dazu $N \in \mathcal{P}$ mit $x \in N$. Dann gilt $x \in N_x \cap N$, also $N_x \cap N \neq \emptyset$. Die Definition einer Partition impliziert $N_x = N$. Somit ist N_x die einzige Menge in $\mathcal{P}$, die x enthält.

Sei nun $x \in M$ und sei N_x die eindeutig bestimmte Menge in $\mathcal{P}$, die x als Element enthält. Die Äquivalenzklasse $[x]$ ist die Menge aller $y \in M$, so dass ein $N \in \mathcal{P}$ mit $x, y \in N$ existiert. Ein solches N kann aber nur N_x sein. Daraus folgt $[x] = N_x$. Die Äquivalenzklassen von R sind also genau die Mengen N_x mit $x \in M$. Hierbei handelt es sich aber genau um die Mengen in $\mathcal{P}$, denn jedes N_x liegt in $\mathcal{P}$ und für jedes $N \in \mathcal{P}$ und jedes $x \in N$ gilt $N = N_x$.

Die Äquivalenzklassen von R sind somit genau die Elemente von $\mathcal{P}$.

Zusatzaufgabe

Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgabe wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben und eine Rückmeldung zu dieser möchten, können Sie Ihre Lösung zusammen mit Ihren Hausaufgaben in Opal hochladen oder in Ihrer Präsenzübung präsentieren.

Aufgabe 8

Sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine $(n+1)$ -elementige Teilmenge von $\{1, \dots, 2n\}$. Zeigen Sie, dass $a, b \in M$ existieren, so dass $a \neq b$ und dass a ein Teiler von b ist.

Wir können jede natürliche Zahl x in der Form $2^\ell y$ schreiben, wobei 2^ℓ die größte Zweierpotenz ist, die x teilt, und wobei y eine ungerade natürliche Zahl ist. Im Folgenden schreiben wir $x_{2'}$ für die Zahl y . Da $x_{2'}$ ein Teiler von x ist, gilt $x_{2'} \leq x$.

Für $m \in M$ gilt also $1 \leq m_{2'} \leq m \leq 2n$. Die Menge $\{1, \dots, 2n\}$ hat genau n ungerade Elemente. Für $m \in M$ gibt es daher genau n Möglichkeiten für $m_{2'}$. Da M aber $n+1$ Elemente hat, muss es zwei verschiedene Elemente $a, b \in M$ mit $a_{2'} = b_{2'}$ geben. Wir können annehmen, dass $a < b$, da wir andernfalls die Rollen von a und b vertauschen können. Setze $c := a_{2'} = b_{2'}$.

Wir schreiben nun $a = 2^r a_{2'} = 2^r c$ und $b = 2^s b_{2'} = 2^s c$. Wegen $a < b$ gilt $r < s$. Nun gilt $b = 2^s c = 2^{s-r} 2^r c = 2^{s-r} a$, also $a \mid b$.