

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der dritten Präsenzübung. Der späteste Abgabetermin ist der 03.11.2021 um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem dritten Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner Hausaufgaben unter der Überschrift Vorbereitungsaufgaben für Übung 3 finden.

In Opal waren vier Vorbereitungsaufgaben zu finden. In den ersten drei Aufgaben sollte für die folgenden Abbildungen entschieden werden, welche der Eigenschaften "injektiv", "surjektiv" und "bijektiv" sie haben.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$,
- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, f(z) = z^2$,
- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, f(n) = \frac{n}{2n+1}$.

Es sollte jeweils eine der folgenden Antworten ausgewählt werden:

- (a) weder injektiv noch surjektiv (und damit auch nicht bijektiv)
- (b) nur injektiv
- (c) nur surjektiv
- (d) bijektiv (insbesondere also auch injektiv und surjektiv).

Lösung

- Für die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

ist (a) richtig. Zum Beispiel gilt $f(2) = 4 = f(-2)$ (nicht injektiv) und es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -2$ (nicht surjektiv).

- Für die Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, f(z) = z^2$$

ist (a) richtig. Zum Beispiel gilt $f(2) = 4 = f(-2)$ (nicht injektiv) und es gibt kein $z \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = 3$ (nicht surjektiv).

- Für die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, f(n) = \frac{n}{2n+1}$$

ist (b) richtig. Es ist

$$f(n) = \frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2(n+1)+1} = f(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

denn die obige Ungleichung ist äquivalent zu $n(2(n+1)+1) < (2n+1)(n+1)$, also zu $2n^2 + 3n < 2n^2 + 3n + 1$, und dies ist für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Damit können zwei verschiedene natürliche Zahlen nicht das gleiche Bild unter f haben, womit f injektiv ist. Es ist

$$f(n) = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \iff 2n = 2n+1 \iff 0 = 1,$$

womit kein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = \frac{1}{2}$ existieren kann, sodass f nicht surjektiv ist. Andere Begründung der fehlenden Surjektivität: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f(n)$ positiv. Damit kommt z. B. -1 nicht als Bild vor.

Neben den drei eben besprochenen Aufgaben war in Opal noch die folgende Vorbereitungsaufgabe zu finden:

Seien M und N Mengen mit $|M| < |N|$. Wählen Sie die richtigen Aussagen aus. Es könnte Ihnen helfen, zuvor Abschnitt 1.4 aus dem Skript zu wiederholen.

- (a) *Es gibt keine injektive Abbildung $f : N \rightarrow M$.*
- (b) *Es gibt keine surjektive Abbildung $f : N \rightarrow M$.*
- (c) *Es gibt eine bijektive Abbildung von eine Teilmenge S von N nach M .*
- (d) *Es gibt immer eine injektive Abbildung $f : M \times M \rightarrow N$.*

Lösung

- (a) Richtig nach Satz 1.18 und der darunter gegebenen Definition.
- (b) Falsch (Satz 1.19).
- (c) Richtig. Und das sieht man so: Nach Definition von $|M| < |N|$ existiert eine injektive Abbildung von M nach N , sagen wir $\phi : M \rightarrow N$. Sei $S := \phi(M)$. Sei $\tilde{\phi}$ die Abbildung, die wir erhalten, wenn wir den Zielbereich von ϕ durch S ersetzen, also $\tilde{\phi} : M \rightarrow S, m \mapsto \phi(m)$. Dann ist $\tilde{\phi}$ bijektiv, da ϕ injektiv ist und $S = \phi(M)$ gilt. Die Abbildung $\tilde{\phi}^{-1} : S \rightarrow M$ ist nun bijektiv.

- (d) Falsch. Nehmen Sie z. B. $M := \{0, 1\}$ und $N := \{0, 1, 2\}$. Dann ist $|M \times M| = 4$ und $|N| = 3$, womit keine injektive Abbildung $M \times M \rightarrow N$ existieren kann (das folgt aus der Tatsache, dass das Bild einer endlichen Menge unter einer injektiven Abbildung die gleiche Mächtigkeit wie die Menge hat, was wiederum leicht aus der Definition einer injektiven Abbildung folgt.).

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Sei $M := \{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie alle Äquivalenzrelationen auf M an.

Lösung

Bevor wir die Lösung besprechen, wollen wir uns klarmachen, dass es einen sehr engen Zusammenhang zwischen den Äquivalenzrelationen auf einer Menge und den Partitionen dieser Menge gibt.

Zunächst rufen wir uns kurz den Begriff der Partition in Erinnerung. Wie Sie wissen, ist eine Partition einer Menge M eine Menge $\mathcal{P}$ von Teilmengen von M , so dass

- die Vereinigung dieser Teilmengen gleich M ist,
- zwei verschiedene dieser Teilmengen disjunkt sind (also eine leere Schnittmenge haben),
- die Teilmengen nichtleer sind.

Etwas salopp und informell ausgedrückt bekommen wir eine Partition von M , indem wir die Menge M in nichtleere Teilmengen "unterteilen", so dass sich zwei verschiedene Teilmengen nicht "überlappen".

Hier ein schönes Alltagsbeispiel für eine Partition: Sei M die Menge der Schülerinnen und Schüler einer Schule. Fassen wir jede Schulklasse als die Menge der Schülerinnen und Schüler auf, die diese Klasse besuchen, so ist die Menge der Schulklassen eine Partition der Menge aller Schülerinnen und Schüler an der betrachteten Schule.

Wie oben erwähnt, gibt es einen engen Zusammenhang zwischen den Partitionen auf einer Menge M und den Äquivalenzrelationen auf M . Und diesen werden wir uns jetzt näher angucken:

- (1) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M . Wir können aus Lemma 1.6 ableiten, dass die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$ eine Partition von M ist. Außerdem sagt uns das erwähnte Lemma, dass zwei Elemente von M in Relation stehen genau dann, wenn sie in derselben Äquivalenzklasse liegen.
- (2) Sei $\mathcal{P}$ eine Partition einer Menge M . Wir definieren die Relation R auf M durch

$$xRy :\Leftrightarrow \exists N \in \mathcal{P} : x, y \in N.$$

Zwei Elemente von M stehen also genau dann in Relation, wenn sie zusammen in einer zur Partition $\mathcal{P}$ gehörenden Teilmenge von M gehören. Nach Lemma 1.8 bzw. nach einer Hausaufgabe von Blatt 2 ist R eine Äquivalenzrelation auf M und die Äquivalenzklassen von R sind genau die Elemente von $\mathcal{P}$.

Somit erhalten mit jeder Äquivalenzrelation auf M eine Partition von M und mit jeder Partition von M eine Äquivalenzrelation auf M .

Wir können sogar noch ein bisschen mehr sagen: Die Äquivalenzrelationen auf einer Menge M sind *genau* die zu den Partitionen von M assoziierten Äquivalenzrelationen, also genau die in (2) gegebenen Äquivalenzrelationen. Um dies zu sehen, stellen wir uns vor, dass wir alle Partitionen von M bestimmt haben und für jede dieser Partitionen die gemäß (2) zugehörige Äquivalenzrelation bestimmt haben. Wir stellen uns auch vor, dass wir alle so erhaltenen Äquivalenzrelationen auf einer Liste notiert haben (z. B. als Mengen). Um uns klar zu machen, dass wir damit bereits alle Äquivalenzrelationen auf M gefunden haben, nehmen wir an, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist, und zeigen, dass $\sim$ bereits auf unserer Liste steht. Nach (1) ist die Menge $M/\sim$ der Äquivalenzklassen von $\sim$ eine Partition von M . Gemäß (2) gehört zu dieser Partition die Äquivalenzrelation R auf M , wobei

$$xRy \Leftrightarrow \exists N \in M/\sim : x, y \in N.$$

Die Äquivalenzrelation R steht bereits auf unserer Liste. Nun stehen zwei Elemente von M genau dann in der Relation R , wenn sie zusammen in einer zu $M/\sim$ gehörenden Teilmenge liegen, also wenn sie zusammen in einer Äquivalenzklasse von $\sim$ liegen. Nach (1) ist dies aber genau dann der Fall, wenn beide Elemente in der Relation $\sim$ stehen. Damit sind die Relationen $\sim$ und R gleich, womit also $\sim$ schon auf unserer Liste steht! Damit sind die in (2) beschriebenen Relationen also alle Äquivalenzrelationen auf M .

Fazit: Wollen wir die Äquivalenzrelationen auf einer Menge M bestimmen, so reicht es, die Partitionen von M zu bestimmen. Aus diesen können dann so wie in (2) die Äquivalenzrelationen auf M erhalten werden.

Zur eigentlichen Aufgabe ist nun nicht mehr viel zu sagen. Die Aufgabenstellung besteht darin, alle Äquivalenzrelationen auf $M = \{1, 2, 3, 4\}$ zu finden. Wie oben besprochen, müssen wir dazu nur die Partitionen von M finden. Und da sind sie:

$$\begin{aligned} & \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}, \\ & \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}, \quad \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}, \\ & \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}, \quad \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}, \\ & \{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\}, \quad \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}, \\ & \quad \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \quad \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \\ & \quad \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}, \quad \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}, \\ & \{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}, \quad \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}, \quad \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \\ & \quad \{\{1, 2, 3, 4\}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Geben Sie Beispiele für Abbildungen f mit den gegebenen Eigenschaften an.

- (a) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ injektiv, nicht surjektiv.
- (b) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ surjektiv, nicht injektiv.
- (c) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ injektiv, nicht surjektiv.

Lösung

- (a) Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, f(n) = 2n$. f ist injektiv, denn wenn $2n = f(n) = f(m) = 2m$ für $n, m \in \mathbb{N}$, so muss $n = m$ gelten. f ist nicht surjektiv: Zum Beispiel gilt $3 \notin f(\mathbb{N})$, denn es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $2n = 3$.
- (b) Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \\ n/2 & \text{wenn } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Die Abbildung f ist surjektiv, denn für ungerades n gilt $n = f(n)$ und für gerades n gilt $n = f(2n)$. f ist nicht injektiv, denn z. B. gilt $3 = f(3) = f(6)$.

- (c) Sei $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 0 \\ 2^n & \text{wenn } n > 0 \\ 3^{-n} & \text{wenn } n < 0 \end{cases}$$

Dann ist f injektiv. Seien dazu $n, m \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = f(m)$. Wir haben zu zeigen, dass $n = m$. Gilt $n, m > 0$, so gilt $2^n = f(n) = f(m) = 2^m$ und damit, wie gewünscht, $n = m$. Genauso folgt $m = n$ im Falle $n, m < 0$ (denn $3^n = 3^m$ impliziert $m = n$). Da Potenzen von 2 bzw. 3 nicht Null sein können, ist es nicht möglich, dass eine der Zahlen n, m Null ist und die andere nicht. Auch ist es nicht möglich, dass eine der beiden Zahlen kleiner und die andere größer Null ist. Dann hätten wir nämlich $2^n = 3^m$ oder $2^m = 3^n$, was nicht möglich ist.

f ist nicht surjektiv, weil zum Beispiel 5 keine Potenz von 2 oder 3 ist, sodass kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $f(n) = 5$ existiert.

Aufgabe 4

Seien T und S Mengen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) $\mathcal{P}(T \cap S) = \mathcal{P}(T) \cap \mathcal{P}(S)$.
- (b) $\mathcal{P}(T) \cup \mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(T \cup S)$.
- (c) $\mathcal{P}(T) \cup \mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(T \cup S)$ genau dann, wenn $S \subseteq T$ oder $T \subseteq S$ gilt.

Lösung

- (a) Es gilt $X \subseteq T \cap S$ genau dann, wenn $X \subseteq T$ und $X \subseteq S$, also genau dann, wenn $X \in \mathcal{P}(S) \cap \mathcal{P}(T)$. Deswegen gilt $\mathcal{P}(T \cap S) = \mathcal{P}(S) \cap \mathcal{P}(T)$.
- (b) Wenn $X \in \mathcal{P}(T)$ ist, dann ist X eine Teilmenge von T und damit von $T \cup S$. Darum gilt $\mathcal{P}(T) \subseteq \mathcal{P}(T \cup S)$. Analog sieht man, dass $\mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(T \cup S)$ gilt. Damit folgt $\mathcal{P}(T) \cup \mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(T \cup S)$.
- (c) $\Rightarrow$: Angenommen, $\mathcal{P}(T) \cup \mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(T \cup S)$. Wir zeigen, dass $S \subseteq T$ oder $T \subseteq S$ gilt. Dazu betrachten wir zwei Fälle:

1. Fall: $T \subseteq S$

Dann ist nichts zu zeigen.

2. Fall: $T \not\subseteq S$

Wir zeigen, dass dann zwangsläufig $S \subseteq T$ gilt. Nehmen wir an, dies sei nicht der Fall. Dann gilt also $S \not\subseteq T$. Somit existieren Elemente $t \in T \setminus S$ und $s \in S \setminus T$. Damit ist $\{t, s\} \in \mathcal{P}(T \cup S)$, aber $\{t, s\} \notin \mathcal{P}(T) \cup \mathcal{P}(S)$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\mathcal{P}(T) \cup \mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(T \cup S)$. Folglich muss $S \subseteq T$ gelten.

$\Leftarrow$: Angenommen, $S \subseteq T$ oder $T \subseteq S$ gilt. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{P}(T) \cup \mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(T \cup S)$ gilt.

Nach (b) gilt die Inklusion

$$\mathcal{P}(T) \cup \mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(T \cup S).$$

Zu zeigen bleibt die Inklusion $\mathcal{P}(T \cup S) \subseteq \mathcal{P}(T) \cup \mathcal{P}(S)$.

Wenn $S \subseteq T$ ist, hat man $T \cup S = T$ und $\mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(T)$ und deswegen

$$\mathcal{P}(T \cup S) = \mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(T) \cup \mathcal{P}(S) \stackrel{(b)}{\subseteq} \mathcal{P}(T \cup S) = \mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(T) \cup \mathcal{P}(S).$$

Analog folgt aus $T \subseteq S$, dass $\mathcal{P}(T) \cup \mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(T \cup S)$ gilt.

Aufgabe 5

Beweisen Sie Lemma 1.14 auf der Vorlesung:

Seien M, N Mengen mit $N \neq \emptyset$ und sei $g : N \rightarrow M$ injektiv. Dann existiert eine surjektive Abbildung $f : M \rightarrow N$ mit $f \circ g = \text{id}_N$.

Lösung

Weil g injektiv ist, gibt es für jedes $m \in \text{Bild}(g)$ ein eindeutiges $n \in N$ mit $g(n) = m$. Wir wählen ein Element $\tilde{n} \in N$ und definieren

$$f : M \rightarrow N, m \mapsto \begin{cases} n & \text{mit } g(n) = m, \text{ wenn } m \in \text{Bild}(g) \\ \tilde{n} & \text{wenn } m \notin \text{Bild}(g). \end{cases}$$

Die Abbildung f ist surjektiv, denn für jedes $n \in N$ gilt $n = f(g(n))$. Außerdem gilt $\text{id}_N(n) = n = (f \circ g)(n)$ und damit $\text{id}_N = f \circ g$.

Aufgabe 6

Seien M, N nichtleere Mengen mit $|N| \geq 2$ und $\text{Abb}(M, N)$ die Menge aller Abbildungen von M nach N .

Man zeige, dass es eine injektive Abbildung von $\mathcal{P}(M)$ in $\text{Abb}(M, N)$ gibt.

(Hinweis: Es könnte helfen, zuerst den Fall $N = \{0, 1\}$ zu betrachten.)

Lösung

Wegen $|N| \geq 2$ hat N mindestens zwei Elemente, sagen wir j und n .

Eine Abbildung von $\mathcal{P}(M)$ nach $\text{Abb}(M, N)$ ordnet jedem Element von $\mathcal{P}(M)$, also jeder Teilmenge von M , eine Abbildung von M nach N zu. Wir haben nun eine injektive Abbildung von $\mathcal{P}(M)$ nach $\text{Abb}(M, N)$ zu finden.

Um eine Idee zu bekommen, wie man so eine Abbildung wählen kann, stellen wir uns vor, dass ich eine Teilmenge A von M auswähle, ohne Ihnen meine Wahl zu verraten, und Sie auffordere, durch Fragen herauszufinden, welche Teilmenge ich ausgewählt habe. Dazu müssen Sie herausfinden, welche Elemente von M in A enthalten sind und welche nicht. Sie fragen mich also für jedes Element $m \in M$, ob es in A enthalten ist oder nicht. Für jedes Element m von M erhalten Sie die Antwort "Ja" oder "Nein". Und damit sind wir bei der entscheidenden Idee: Wir definieren eine Abbildung $M \rightarrow N$, welche einem Element m von M das Element j von N zuordnet, falls meine Antwort "Ja" lautet (also falls $m \in A$ gilt) und welche einem Element m von M das Element n von N zuordnet, falls meine Antwort "Nein" lautet (also falls $m \notin A$ gilt).

Jeder Teilmenge A von M ordnen wir also die Abbildung

$$\chi_A : M \rightarrow N, m \mapsto \begin{cases} j & \text{wenn } m \in A \\ n & \text{wenn } m \notin A \end{cases}$$

zu.

Definiere nun

$$\chi : \mathcal{P}(M) \rightarrow \text{Abb}(M, N), A \mapsto \chi_A.$$

Wir zeigen nun, dass χ injektiv ist. Seien dazu $A, B \in \mathcal{P}(M)$ mit $\chi(A) = \chi(B)$. Für $m \in M$ gilt dann

$$m \in A \iff j = \chi_A(m) = \chi_B(m) \iff m \in B$$

und damit $A = B$. Deswegen ist χ injektiv.

Aufgabe 7

Sei M eine Menge und für $n \in \mathbb{N}$ sei $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass es eine Bijektion zwischen den Mengen $M \times M$ und $\text{Abb}([2], M)$ gibt.
- (b) Zeigen Sie allgemein, dass es eine Bijektion zwischen den Mengen

$$M^k := M \times M \times \dots \times M \text{ (} k \text{ - times)}$$

und $\text{Abb}([k], M)$ gibt.

- (c) Angenommen $|M| = m \in \mathbb{N}$. Geben Sie $|\text{Abb}([k], M)|$, $|\text{Abb}([k], \mathbb{N})|$ und $|\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})|$ an.

Hinweise:

1. Jede reelle Zahl hat höchstens zwei Dezimaldarstellungen. Der einzige Fall in dem eine reelle Zahl zwei verschiedene Dezimaldarstellungen haben kann, ist der Fall, dass sie eine Dezimaldarstellungen mit Periode 9 und eine mit Periode 0 hat; z.B. gilt $0, \bar{9} = 1 = 1, \bar{0}$.
2. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $|\text{Abb}(A, B)|$ und $|\text{Abb}(C, D)|$ gleichmächtig sind, wenn A, B, C, D Mengen mit $|A| = |C|$ und $|B| = |D|$ sind.

Lösung

- (a) Wir definieren die Abbildung $\phi : M \times M \rightarrow \text{Abb}([2], M)$ durch

$$\phi(m, n) : [2] \rightarrow M, 1 \mapsto m, 2 \mapsto n.$$

Die Abbildung ϕ ordnet also jedem Paar $(m, n) \in M \times M$ die Abbildung von $[2]$ nach M zu, welche 1 auf m und 2 auf n abbildet.

Wir zeigen nun, dass ϕ eine Bijektion ist.

Wenn $\phi(m, n) = \phi(m', n')$, dann $m = \phi(m, n)(1) = \phi(m', n')(1) = m'$ und analog $n = n'$, also $(m, n) = (m', n')$. Damit ist ϕ injektiv.

Wenn $f : [2] \rightarrow M$ eine Abbildung in $\text{Abb}([2], M)$ ist, dann $\phi(f(1), f(2)) = f$, sodass ϕ surjektiv ist.

Als injektive und surjektive Abbildung ist ϕ nun bijektiv.

- (b) Wir verallgemeinern die Argumentation in (a): Definiere die Abbildung $\phi : M^k \rightarrow \text{Abb}([k], M)$ durch

$$\phi(m_1, \dots, m_k) : [k] \rightarrow M, i \mapsto m_i.$$

Wenn $\phi(m_1, \dots, m_k) = \phi(n_1, \dots, n_k)$, dann $m_i = \phi(m_1, \dots, m_k)(i) = \phi(n_1, \dots, n_k)(i) = n_i$ für alle $1 \leq i \leq k$. Damit ist ϕ injektiv.

Wenn $f \in \text{Abb}([k], M)$ ist, dann $\phi(f(1), \dots, f(k)) = f$, sodass ϕ auch surjektiv ist.

Folglich ist ϕ bijektiv.

- (c) Nach (a) gilt $|\text{Abb}([k], M)| = |M^k| = m^k$.

Nach (b) $|\text{Abb}([k], \mathbb{N})| = |\mathbb{N}^k|$. Weil $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ ist, erhalten wir nach k -facher Wiederholung, dass $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$.

Wir beweisen nun, dass $|\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ ist. Wie definieren eine Abbildung $\phi : \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt. Wenn $f \in \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ gilt, können wir f interpretieren als eine Folge $(f(1), f(2), \dots)$ von Elementen aus $\mathbb{N}$. Definiere $\phi(f)$ nun als

$$0, \underbrace{1 \dots 1}_{f(1)\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{f(2)\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{f(3)\text{-mal}} 0 \dots$$

Da die obige Darstellung eindeutig durch $f(1), f(2), \dots$ festgelegt ist, gibt es keine zwei verschiedenen Abbildungen f und g , die unter ϕ gleich abgebildet werden. Also ist ϕ injektiv, sodass $|\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$.

Wir definieren nun eine Abbildung $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{Z})$. Für jede reelle Zahl x nehmen wir dazu eine Dezimaldarstellung von x her. Wenn es zwei verschiedene gibt, bedeutet das dem ersten Hinweis zufolge, dass x eine Dezimaldarstellung mit Periode 0 und eine mit Periode 9 hat. In diesem Fall nehmen wir die Dezimaldarstellung mit Periode 9 her. Wenn die so erhaltene Dezimaldarstellung nun $x = x_0, x_1 x_2 x_3 \dots$ lautet, dann definieren wir $\eta(x) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}, i \mapsto x_i$. Die Abbildung $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}), x \mapsto \eta(x)$ ist

injektiv, denn wenn $\eta(x) = \eta(y)$ gilt, so haben x und y die gleiche Dezimaldarstellung, womit $x = y$ gilt. Aufgrund der Injektivität von η gilt $|\mathbb{R}| \leq |\text{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{Z})|$. Wir wissen, dass $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}|$ und $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$. Dem ersten Hinweis zufolge gilt also $|\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})| = |\text{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{Z})|$. Somit haben wir $|\mathbb{R}| \leq |\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})|$ gezeigt.

Weiter oben haben wir aber auch $|\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$ gezeigt. Es gilt also Gleichheit.

Hinweis: Wenn Sie auf diese Lösung nicht selbst gekommen sind, ist das absolut kein Grund zur Sorge. Es handelt sich hier um eine schwierige Aufgabe, bei der auch ein fortgeschrittener Mathematiker erst einmal nachdenken müsste.

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 10.11.2021, 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Seien M, N, L Mengen und $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow L$ Abbildungen. Bearbeiten Sie eine der Teilaufgaben (a), (b). Wenn Sie beide bearbeiten, kreuzen Sie an, welche wir korrigieren sollen. Beweisen Sie außerdem (c).

(a) *Angenommen, $g \circ f$ ist injektiv.*

(a1) *Zeigen Sie, dass f injektiv ist.*

(a2) *Zeigen Sie, dass g injektiv ist, wenn f surjektiv ist.*

(a3) *Geben Sie ein Beispiel an, in dem g nicht injektiv ist.*

(b) *Angenommen, $g \circ f$ ist surjektiv.*

(b1) *Zeigen Sie, dass g surjektiv ist.*

(b2) *Zeigen Sie, dass f surjektiv ist, wenn g injektiv ist.*

(b3) *Geben Sie ein Beispiel an, in dem f nicht surjektiv ist.*

(c) *Geben Sie ein Beispiel an, in dem $g \circ f$ eine Bijektion ist, aber weder f noch g bijektiv ist.*

Lösung

(a1) Wenn f nicht injektiv ist, dann existieren $m, t \in M$ mit $f(m) = f(t)$. Daraus folgt, dass $(g \circ f)(m) = (g \circ f)(t)$, ein Widerspruch.

(a2) Angenommen f ist surjektiv, aber g nicht injektiv. Da g nicht injektiv ist, existieren $n, s \in N$ mit $n \neq s$, so dass $g(n) = g(s)$. Da f surjektiv ist, existieren $m, t \in M$ mit $f(m) = n$ und $f(t) = s$. Wegen $n \neq s$ gilt $m \neq t$. Nun gilt $g(f(m)) = g(f(t))$, ein Widerspruch zur Injektivität von $g \circ f$. Die Annahme, g sei nicht injektiv, muss also falsch sein. Damit ist g injektiv.

(a3) Sei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definiere $f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ durch $f(n) = 2n$ und

$$g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ (n-1)/2 & \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Dann $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n) = n$, sodass $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}_0}$ injektiv ist. Natürlich ist g nicht surjektiv, zum Beispiel $g(2) = 1 = g(3)$.

(b1) Wenn g nicht surjektiv ist, dann existiert ein $l \in L$ mit $l \notin \text{Bild}(g)$. Weil $\text{Bild}(g \circ f) \subseteq \text{Bild}(g)$ gilt, haben wir $l \notin \text{Bild}(g \circ f)$. Doch dann ist $g \circ f$ nicht surjektiv, was aber nach Annahme der Fall ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass g surjektiv sein muss.

(b2) Angenommen, g ist injektiv, aber f nicht surjektiv. Dann existiert ein $n \in N \setminus \text{Bild}(f)$. Sei $l := g(n)$. Wegen der Injektivität von g gilt $g^{-1}(l) = \{n\}$, d.h. n ist das einzige Urbild von l unter g . Da n aber nicht im Bild von f liegt, folgt daraus $l \notin \text{Bild}(g \circ f)$ (andernfalls wäre $l = g(f(m))$ für ein $m \in M$, womit aber $n = f(m) \in \text{Bild}(f)$ wäre). Damit ist $g \circ f$ nicht surjektiv, was aber nach Annahme der Fall ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass f surjektiv sein muss.

(b3) Betrachte das Beispiel aus (a3).

(c) Betrachte wieder das Beispiel aus (a3) (bzw. (b3)).

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

(b) $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}|$

Lösung

(a) Wir bestimmen zuerst eine Bijektion $\eta : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$. Definiere

$$\eta : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 0 \\ n/2 & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ -(n+1)/2 & \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Wir zeigen, dass η bijektiv ist. Fangen wir mit der Injektivität an. Seien dazu $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $\eta(n) = \eta(m)$. Dann ist es nicht möglich, dass eine der Zahlen n, m gleich 0 und die andere größer als 0 ist, denn nach Definition von η wäre dann eine der Zahlen $\eta(n), \eta(m)$ gleich 0 und die andere nicht (was wegen $\eta(m) = \eta(n)$ nicht der Fall sein kann). Ebenfalls ist es nicht möglich, dass eine der Zahlen n, m gerade und die andere ungerade ist, denn dann wäre eine der Zahlen $\eta(n), \eta(m)$ positiv und die andere negativ, was wegen $\eta(n) = \eta(m)$ nicht sein kann. Damit sind n und m also beide gleich 0, beide gerade und größer als 0 oder beide ungerade. Wegen $\eta(n) = \eta(m)$ haben wir einen der folgenden Fälle:

- $n = 0 = m$,
- $n/2 = m/2$,
- $-(n+1)/2 = -(m+1)/2$.

Damit gilt immer $n = m$. Die Abbildung η ist also injektiv.

Wir zeigen nun, dass η surjektiv ist. Sei dazu $z \in \mathbb{Z}$. Wir müssen zeigen, dass z ein Urbild unter η hat. Falls $z = 0$ gilt, so haben wir $z = \eta(0)$. Wenn $z > 0$ gilt, so haben wir $z = \eta(2z)$. Wenn $z < 0$ gilt, so haben wir $z = \eta(2|z| - 1)$. Also hat z in jedem Fall ein Urbild unter η und deswegen ist η surjektiv. Damit ist η bijektiv.

Die Abbildung $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto n - 1$ ist bijektiv.

Daraus folgt, dass die Komposition $\eta \circ \rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ eine Bijektion ist, also $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

(b) Nach (a) gibt es eine Bijektion $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$. Wir definieren die Abbildung

$$\phi \times \text{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, (a, b) \mapsto (\phi(a), b).$$

Wenn $(\phi \times \text{id}_{\mathbb{N}})(a, b) = (\phi \times \text{id}_{\mathbb{N}})(a', b')$, dann $(\phi(a), b) = (\phi(a'), b')$. Dies ist äquivalent zu $\phi(a) = \phi(a')$ und $b = b'$. Weil ϕ eine Bijektion ist, folgt $a = a'$. Also $(a, b) = (a', b')$. Damit ist $\phi \times \text{id}_{\mathbb{N}}$ injektiv.

Die Abbildung ist auch surjektiv, denn für alle $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ existiert ein $a_0 \in \mathbb{N}$ mit $\phi(a_0) = a$ (da ϕ surjektiv ist). Daraus folgt, dass $(\phi \times \text{id}_{\mathbb{N}})(a_0, b) = (a, b)$.

Somit ist $\phi \times \text{id}_{\mathbb{N}}$ eine Bijektion und damit gilt $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}|$.

Zusatzaufgabe

Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgabe wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben und eine Rückmeldung zu dieser möchten, können Sie Ihre Lösung zusammen mit Ihren Hausaufgaben in Opal hochladen oder in Ihrer Präsenzübung präsentieren.

Aufgabe 10

Sei $M := \{1, \dots, 101\}$ und $\phi : M \rightarrow M$ eine Bijektion.

Man zeige, dass es möglich ist, aus der Zahlenfolge $S = (\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(101))$ so 90 Zahlen wegzustreichen, dass die übrigen 11 der Größe nach geordnet sind (steigend oder fallend).

Anleitung:

Im Folgenden meinen wir mit einer Teilfolge von S eine Zahlenfolge, die man aus S durch Wegstreichen von Elementen erhält.

Für $1 \leq i \leq 101$ sei w_i die maximale Länge einer Teilfolge von S , die in $\phi(i)$ endet und deren Elemente der Größe nach ansteigen. Sei f_i die maximale Länge einer Teilfolge von S , die in $\phi(i)$ endet und deren Elemente der Größe nach fallen.

1. Zeigen Sie, dass $i \neq j \implies (w_i, f_i) \neq (w_j, f_j)$ für alle $1 \leq i, j \leq 101$.

2. Zeigen Sie, dass

$$|\{(w_i, f_i) \mid 1 \leq i \leq 101, w_i, f_i \leq 10\}| \leq 100.$$

Lösung

(1) Angenommen, $i < j$. Wenn $\phi(i) < \phi(j)$ ist, dann gilt $w_i < w_j$. Wenn $\phi(i) > \phi(j)$ ist, gilt $f_j > f_i$. Damit haben wir in jedem Fall $(w_i, f_i) \neq (w_j, f_j)$.

(2) Sei $[10] := \{1, 2, \dots, 10\}$. Wir haben $|\{(w_i, f_i) \mid 1 \leq i \leq 101, 1 \leq w_i, f_i \leq 10\}| \leq |[10] \times [10]| = 10 \cdot 10 = 100$.

Definiere nun die Abbildung $\eta : M \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch $\eta(i) = (w_i, f_i)$. Nach (1) ist η injektiv, sodass $|\text{Bild}(\eta)| = |M| = 101$. Nun impliziert (2), dass ein $j \in M$ mit $(w_j, f_j) \notin |\{(w_i, f_i) \mid 1 \leq i \leq 101, w_i, f_i \leq 10\}|$ existieren muss. Das impliziert, dass $w_j \geq 11$ oder $f_j \geq 11$ gilt. In erstem Fall gibt es eine wachsende Teilfolge von S , die in $\phi(j)$ endet. In zweitem Fall gibt es eine fallende Teilfolge von S , die in $\phi(j)$ endet.