

## Hausaufgaben zur Vorbereitung

*Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der achten Übung. Der späteste Abgabetermin ist der 8.12. um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem achten Übungstermin!*

### Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 8* finden.

#### Lösung der ersten Vorbereitungsaufgaben

In der ersten Vorbereitungsaufgaben waren die Vektoren

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dabei waren  $r_1$  und  $r_2$  konkret gegebene reelle Zahlen. Welche Werte für  $r_1$  und  $r_2$  Sie bei der Durchführung der Aufgabe zu sehen bekamen, war vom Zufall abhängig. Die Aufgabe bestand darin,  $a$  so zu bestimmen, dass die drei Vektoren linear abhängig sind.

Eine mögliche Lösung springt mehr oder weniger ins Auge: Wir können  $a = r_1 + r_2$  wählen. Dann gilt nämlich

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

womit die drei Vektoren linear abhängig sind.

Man kann sogar zeigen, dass  $a = r_1 + r_2$  die einzige mögliche Lösung ist.

#### Lösung der zweiten Vorbereitungsaufgabe

In der zweiten Vorbereitungsaufgabe waren die Vektoren

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, und zwar aufgefasst als Vektoren im  $(\mathbb{Z}/3)$ -Vektorraum  $(\mathbb{Z}/3)^2$ . Das heißt, mit 1 bzw. 2 waren eigentlich die Elemente [1] bzw. [2] von  $\mathbb{Z}/3$  gemeint. Die Aufgabe bestand darin, die Mächtigkeit des Erzeugnisses  $\langle v, w \rangle$  zu bestimmen. Per Definition ist  $\langle v, w \rangle$  die Menge aller Vektoren

$$k \cdot v + l \cdot w,$$

wobei  $k, l \in \mathbb{Z}/3$ . Einsetzen aller möglichen Werte für  $k$  und  $l$  zeigt, dass alle 9 Vektoren aus  $(\mathbb{Z}/3)^2$  als eine solche Linearkombination geschrieben werden können. Damit gilt  $|\langle v, w \rangle| = 9$ .

### Lösung der dritten Vorbereitungsaufgabe

In der vierten Vorbereitungsaufgabe waren die richtigen der folgenden Aussagen auszuwählen.

- Ist  $B$  ein Erzeugendensystem eines Vektorraums  $V$ , so ist jeder Vektor durch genau eine Linearkombination der Vektoren aus  $B$  darstellbar.
- Ist  $B$  ein Erzeugendensystem eines Vektorraums  $V$ , so ist jeder Vektor durch höchstens eine Linearkombination der Vektoren aus  $B$  darstellbar.
- Ist  $B$  ein Erzeugendensystem eines Vektorraums  $V$ , so ist jeder Vektor durch mindestens eine Linearkombination der Vektoren aus  $B$  darstellbar.
- Ist  $B$  eine Menge linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraums  $V$ , so ist jeder Vektor durch höchstens eine Linearkombination der Vektoren aus  $B$  darstellbar.

Um zu entscheiden, welche Aussagen richtig sind, betrachten wir einen Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$ . Sei nun  $B$  ein Erzeugendensystem von  $V$ . Per Definition bedeutet dies, dass

$$V = \langle B \rangle = \{ \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n \mid n \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \text{ und } b_1, \dots, b_n \in B \}.$$

Folglich lässt sich jedes Element von  $V$  in der Form  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  mit  $n \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  und  $b_1, \dots, b_n \in B$  schreiben. Es ist also jeder Vektor aus  $V$  durch mindestens eine Linearkombination der Vektoren aus  $B$  darstellbar, womit die dritte Aussage richtig ist.

Wir machen uns nun klar, dass die erste und die zweite Aussage im Allgemeinen nicht richtig sind. Sei dazu

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es lässt sich jeder Vektor aus  $\mathbb{R}^2$  als eine Linearkombination der Vektoren  $e_1$  und  $e_2$  schreiben. Eine solche Linearkombination können wir auch als eine Linearkombination der Vektoren  $e_1, e_2, v$  auffassen, denn für  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  gilt  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + 0v$ . Somit lässt sich jeder Vektor aus  $\mathbb{R}^2$  als eine Linearkombination der Vektoren  $e_1, e_2, v$  schreiben. Damit ist  $B := \{e_1, e_2, v\}$  ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^2$ . Es gilt

$$0e_1 + 0e_2 + 1v = v = e_1 + e_2.$$

Damit gibt es zwei Möglichkeiten, den Vektor  $v$  als eine Linearkombination der Vektoren aus  $B$  zu schreiben. Damit ist  $v$  weder durch genau eine noch durch höchstens eine Linearkombination der Vektoren aus  $B$  darstellbar. Wir sehen also, dass die erste und die zweite Aussage im Allgemeinen falsch sind.

Die vierte Aussage ist richtig. Dies folgt aus Lemma 3.35.

### Lösung der vierten Vorbereitungsaufgabe

Die vierte Vorbereitungsaufgabe lautete wie folgt: Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$ . Sei  $n \geq 1$  und seien  $v_1, \dots, v_n$  Vektoren aus  $V$ , so dass  $v_1 + \dots + v_n = 0_V$  gilt. Was können wir über die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  sagen? Wählen Sie die richtige Antwort aus.

- Die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  sind linear abhängig.
- Die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  sind linear unabhängig.
- Die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  bilden ein Erzeugendensystem von  $V$ .
- Man kann nichts darüber sagen, ob die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig oder linear abhängig sind. Man kann auch nichts darüber sagen, ob  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ein Erzeugendensystem von  $V$  ist. Dazu müssten  $V$  und  $v_1, \dots, v_n$  schon konkret gegeben sein.

Richtig ist die erste Aussage, denn mit  $v_1 + \dots + v_n = 0_V$  gilt  $1v_1 + \dots + 1v_n = 0_V$ . Die Definition linearer Abhängigkeit zeigt damit sofort, dass die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  linear abhängig sind. Die zweite Aussage ist dementsprechend falsch.

Die dritte Aussage ist im Allgemeinen falsch. Genauer zeigen wir, dass die dritte Aussage immer falsch ist, wenn  $V \neq \{0_V\}$  gilt. Sei also  $V \neq \{0_V\}$  angenommen. Sei  $v_1 := 0_V$ . Mit  $n := 1$  gilt dann  $v_1 + \dots + v_n = v_1 = 0_V$ . Es ist aber  $\langle v_1 \rangle = \langle 0_V \rangle = \{0_V\} \neq V$ , womit  $\{v_1\}$  kein Erzeugendensystem von  $V$  ist.

Wie unsere obigen Überlegungen zu den ersten drei Aussagen zeigen, ist die vierte Aussage Quatsch.

## Präsenzaufgaben

*Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.*

### Aufgabe 2

(a) Prüfen Sie, ob die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  sind.

(b) Bestimmen Sie, für welche  $b, c \in \mathbb{R}$  die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  sind.

(c) Finden Sie einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^3$ , so dass

$$\langle v \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y = 0, z - x = 0 \right\}.$$

Folgern Sie, dass die obige Menge ein Unterraum von  $\mathbb{R}^3$  ist und finden Sie eine Basis dieses Unterraums. Geben Sie seine Dimension an.

### Lösung

(a) Seien  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$$

$$2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0.$$

Es gilt also  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\lambda_1 = \lambda_3$  und damit  $5\lambda_2 = 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$ . Somit gilt  $\lambda_2 = 0$ . Hieraus folgt  $\lambda_3 = 0$  und  $\lambda_1 = -2\lambda_2 = 0$ . Also  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Die drei Vektoren sind damit linear unabhängig.

(b) Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind genau dann linear unabhängig, wenn sie nicht linear abhängig sind. Und sie sind genau dann linear abhängig, wenn es  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  mit  $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$  und

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gibt.

Wir überprüfen daher, für welche  $a, b \in \mathbb{R}$  die Gleichung

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mit  $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$  hat. Dies ist äquivalent zu der Frage, für welche  $a, b \in \mathbb{R}$  das Gleichungssystem

$$\lambda_1 + \lambda_2 c = 0$$

$$\lambda_1 b + \lambda_2 = 0$$

eine Lösung  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mit  $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$  hat. Das obige Gleichungssystem lässt sich überführen in das Gleichungssystem

$$\lambda_1 = -\lambda_2 c$$

$$\lambda_2(1 - cb) = 0.$$

Für  $cb \neq 1$  muss  $\lambda_2 = 0$  und damit auch  $\lambda_1 = 0$  gelten. Für  $cb \neq 1$  gibt es also keine Lösung  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mit  $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ . Für  $cb = 1$  gibt es eine solche Lösung aber sehr wohl, nämlich z. B.  $\lambda_2 = 1$  und  $\lambda_1 = -c$ .

Wir können damit festhalten, dass die gegebenen Vektoren genau dann linear abhängig sind, wenn  $cb = 1$  gilt. Sie sind also linear unabhängig genau dann, wenn  $bc \neq 1$  gilt.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y = 0, z - x = 0 \right\} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = 2y, x = z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Wir können also

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wählen. Es ist  $\langle v \rangle$  nach Lemma 3.24 ein Unterraum von  $\mathbb{R}^3$ . Wegen  $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$  ist  $\{v\}$  linear unabhängig. Folglich ist  $\{v\}$  eine Basis von  $\langle v \rangle$  und  $\langle v \rangle$  ist eindimensional.

### Aufgabe 3

Wir erinnern uns daran, dass  $\mathbb{Z}/p$  für jede Primzahl  $p$  ein Körper ist. In dieser Aufgabe betrachten wir Vektorräume über  $\mathbb{Z}/p$  für gegebene Primzahlen  $p$ . Im Folgenden schreiben wir  $0, 1, \dots, p-1$  für die korrespondierenden Elemente von  $\mathbb{Z}/p$ , d.h. für  $0 \leq k \leq p-1$  schreiben wir  $k$  anstelle von  $[k]$ .

(a) Gegeben seien die folgenden Vektoren in  $(\mathbb{Z}/5)^3$ :

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sind  $a, b, c$  linear unabhängig? Ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in  $\langle a, b, c \rangle$  enthalten?

(b) Geben Sie alle Elemente des Vektorraums  $(\mathbb{Z}/2)^3$  an. Visualisieren Sie den Vektorraum durch einen Würfel.

(c) Gegeben seien die folgenden Vektoren in  $(\mathbb{Z}/2)^3$ :

$$v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Vektoren aus  $\langle v, w \rangle$  an. Welche Dimension hat der Vektorraum  $\langle v, w \rangle$ ?

### Lösung

(a) Die Vektoren  $a, b, c$  sind linear abhängig, denn es gilt  $a + 3b + 4c = 0_{(\mathbb{Z}/5)^3}$ . Um die zweite Frage zu beantworten, müssen wir überprüfen, ob die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (\mathbb{Z}/5) \times (\mathbb{Z}/5) \times (\mathbb{Z}/5)$  hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_3 &= 1 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 2 \end{aligned}$$

eine Lösung über  $\mathbb{Z}/5$  hat.

Für jede solche Lösung gilt

$$\lambda_3 = 1 - \lambda_1 = 1 + (-1)\lambda_1 = 1 + 4\lambda_1$$

(denn in  $\mathbb{Z}/5$  gilt  $-1 = 4$ ). Damit gilt weiter

$$0 = 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3\lambda_1 + \lambda_2 + 1 + 4\lambda_1 = 7\lambda_1 + \lambda_2 + 1 = 2\lambda_1 + \lambda_2 + 1$$

(denn  $7 = 2$  in  $\mathbb{Z}/5$ ). Also

$$\lambda_2 = -2\lambda_1 - 1 = 3\lambda_1 + 4$$

(denn  $-2 = 3$  und  $-1 = 4$  in  $\mathbb{Z}/5$ ). Einsetzen in die dritte Gleichung liefert

$$2 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 2\lambda_1 + 3(3\lambda_1 + 4) + 1 + 4\lambda_1 = 2\lambda_1 + 9\lambda_1 + 12 + 1 + 4\lambda_1 = 15\lambda_1 + 13 = 3$$

(denn  $13 = 3$  und  $15 = 0$  in  $\mathbb{Z}/5$ ). Dieser Widerspruch zeigt, dass das Gleichungssystem keine Lösungen über  $\mathbb{Z}/5$  hat. Damit liegt der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nicht in  $\langle a, b, c \rangle$ .

(b) Die Elemente des Vektorraums  $(\mathbb{Z}/2)^3$  sind

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um den Vektorraum durch einen Würfel zu visualisieren, zeichnen wir ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem und tragen darin die Punkte  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$  ein. Diese Punkte sind die Eckpunkte eines Würfels mit Seitenlänge Eins. Die oben aufgelisteten Elemente von  $(\mathbb{Z}/2)^3$  können wir mit den Eckpunkten des Würfels identifizieren.

(c) Es gilt

$$\langle v, w \rangle = \{ \lambda v + \mu w : \lambda, \mu \in \mathbb{Z}/2 \}.$$

Wir müssen also alle  $\mathbb{Z}/2$ -Linearkombinationen von  $v$  und  $w$  bestimmen. Und diese sind:

$$0v + 0w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$1v + 0w = v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$0v + 1w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$1v + 1w = v + w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$\langle v, w \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wie wir sehen, gilt mit  $\lambda v + \mu w = 0_{(\mathbb{Z}/2)^3}$  bereits  $\lambda = \mu = 0$ . Damit sind  $v$  und  $w$  linear unabhängig. Folglich ist  $\{v, w\}$  eine Basis von  $\langle v, w \rangle$ . Dementsprechend ist  $\langle v, w \rangle$  zweidimensional.

## Aufgabe 4

Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$ . Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist. Beweisen Sie die wahren Aussagen und verwenden Sie dabei nur die Definitionen der in der jeweiligen Aussage auftauchenden Begriffe. Widerlegen Sie die falschen Aussagen durch ein Gegenbeispiel.

- (a) Sei  $n \geq 2$ . Dann sind  $v_1, \dots, v_n \in V$  genau dann linear abhängig, wenn mindestens ein Vektor  $v_i$  Linearkombination der anderen ist.
- (b) Ist  $U \subseteq W \subseteq V$  und ist  $U$  linear abhängig, so ist auch  $W$  linear abhängig.
- (c) Ist  $U \subseteq W \subseteq V$  und ist  $W$  linear abhängig, so ist auch  $U$  linear abhängig.
- (d) Sind  $v, w \in V$  linear unabhängig, so sind  $v - w$  und  $v + w$  ebenfalls linear unabhängig.

## Lösung

Die Aussage in (a) ist wahr. Dies beweisen wir wie folgt:

$\Rightarrow$ : Angenommen, die Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in V$  sind linear abhängig. Wir müssen zeigen, dass mindestens einer der Vektoren  $v_i$  eine Linearkombination der anderen ist. Da  $v_1, \dots, v_n \in V$  linear abhängig sind, existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ , so dass mindestens eines der Elemente  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ungleich 0 ist und so dass

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V.$$



Sei  $1 \leq i \leq n$ , so dass  $\lambda_i \neq 0$ . Dann gilt

$$\lambda_i v_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (-\lambda_j) v_j.$$

Wegen  $\lambda_i \neq 0$  existiert  $\lambda_i^{-1}$ . Multiplikation mit  $\lambda_i^{-1}$  auf beiden Seiten liefert

$$v_i = (\lambda_i)^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (-\lambda_j) v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i)^{-1} (-\lambda_j) v_j.$$

Damit ist  $v_i$  eine Linearkombinationen der Vektoren  $v_j$  mit  $1 \leq j \leq n$  und  $j \neq i$ .

$\Leftarrow$ : Angenommen, einer der Vektoren  $v_i$  ist eine Linearkombination der anderen Vektoren. Wir müssen zeigen, dass die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  linear abhängig sind. Da  $v_i$  eine Linearkombination der anderen Vektoren ist, existieren Elemente  $\lambda_j \in K$  für alle  $1 \leq j \leq n$  mit  $j \neq i$ , so dass

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j v_j.$$

Setze  $\lambda_i := -1$ . Dann gilt

$$0_V = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j v_j - v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j v_j + (-1)v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j v_j + \lambda_i v_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j.$$

Wegen  $\lambda_i \neq 1$  folgt, dass die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  linear abhängig sind.

Die Aussage in (b) ist richtig. Sei  $U \subseteq W \subseteq V$ , so dass  $U$  linear abhängig ist. Zu zeigen ist, dass auch  $W$  linear abhängig ist. Da  $U$  linear abhängig ist, sind die Elemente von  $U$  linear abhängig. Es existiert also eine Linearkombination

$$0_V = \sum_{u \in U} \lambda_u u,$$

so dass mindestens ein  $u \in U$  mit  $\lambda_u \neq 0$  existiert. Die obige Summe ist dabei so zu interpretieren wie auf S. 35 im Vorlesungsskript erklärt (insbesondere sind nur endlich viele  $\lambda_u$  ungleich 0). Für  $w \in W$  definieren wir nun  $\mu_w := \lambda_w$  falls  $w \in U$  und  $\mu_w := 0$  falls  $w \in W \setminus U$ . Dann gilt

$$\sum_{w \in W} \mu_w w = \sum_{u \in U} \mu_u u + \sum_{w \in W \setminus U} \mu_w w = \sum_{u \in U} \mu_u u = \sum_{u \in U} \lambda_u u = 0_V.$$

Da ein  $u \in U \subseteq W$  mit  $\mu_u = \lambda_u \neq 0$  existiert, folgt, dass die Elemente von  $W$  linear abhängig sind. Damit ist  $W$  linear abhängig.

Die Aussage in (c) ist im Allgemeinen falsch. Sei etwa

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

und

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq W.$$

Dann ist  $W$  linear abhängig, denn

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist aber  $U$  nicht linear abhängig, da das einzige Element von  $U$  ungleich  $0_{\mathbb{R}^2}$  ist.

Die Aussage in (d) ist falsch. Um dies zu sehen, betrachten wir die Vektoren

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in  $(\mathbb{Z}/2)^2$ . Es sind  $e_1$  und  $e_2$  linear unabhängig. Es gilt

$$(e_1 - e_2) + (e_1 + e_2) = e_1 + e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn  $2 = 0$  in  $\mathbb{Z}/2$ . Damit sind  $e_1 - e_2$  und  $e_1 + e_2$  linear abhängig.

## Hausaufgaben zur Nachbereitung

*Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 15.12., 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.*

### Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 - 3x_2 = 0, x_3 - 2x_4 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

- (a) Finden Sie Vektoren  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$  mit  $\langle v_1, v_2 \rangle = W$ .
- (b) Ist  $W$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^4$ ? Falls ja, bestimmen Sie eine Basis von  $W$  und geben Sie die Dimension von  $W$  an.

**Lösung**

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
 W &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 - 3x_2 = 0, x_3 - 2x_4 = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 = 3x_2, x_3 = 2x_4 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} 3x_2 \\ x_2 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} 3s \\ s \\ 2t \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \langle v_1, v_2 \rangle,
 \end{aligned}$$

wobei  $v_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(b) Wegen  $W = \langle v_1, v_2 \rangle$  ist  $W$  gemäß Lemma 3.24 ein Unterraum von  $\mathbb{R}^4$ . Wir zeigen, dass  $\{v_1, v_2\}$  eine Basis von  $W$  ist. Wegen  $W = \langle v_1, v_2 \rangle$  ist nur zu zeigen, dass  $v_1$  und  $v_2$  linear unabhängig sind. Seien  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$ . Das bedeutet

$$\begin{pmatrix} 3\lambda \\ \lambda \\ 2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt  $\lambda = \mu = 0$ . Damit sind  $v_1$  und  $v_2$ , wie benötigt, linear unabhängig. Daher ist  $\{v_1, v_2\}$  eine Basis von  $W$ . Dementsprechend ist  $W$  zweidimensional.

### Aufgabe 6 (1 Punkt)

Geben Sie einen Körper  $K$  an, so dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1_K \\ 1_K \\ 0_K \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1_K \\ 0_K \\ 1_K \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0_K \\ 1_K \\ 1_K \end{pmatrix}$$

linear abhängig in  $K^3$  sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

### Lösung

Sei  $K := \mathbb{Z}/2$ . Dann gilt  $1_K + 1_K = 0_K$  und somit

$$\begin{pmatrix} 1_K \\ 1_K \\ 0_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_K \\ 0_K \\ 1_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_K \\ 1_K \\ 1_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_K \\ 0_K \\ 0_K \end{pmatrix} = 0_{K^3}.$$

Die drei Vektoren sind also (gemäß der vierten Vorbereitungsaufgabe) linear abhängig in  $K^3$ .

### Aufgabe 7 (5 Punkte)

Seien  $X$  eine nichtleere Menge und sei  $K$  ein Körper. Sei  $V := \text{Abb}(X, K) = \{f : X \rightarrow K\}$ . Definiere

$$\begin{aligned} + : \quad V \times V &\longrightarrow V \\ (f, g) &\longmapsto f + g : X \rightarrow K \end{aligned}$$

mit  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$  und

$$\begin{aligned} \cdot : \quad K \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, g) &\longmapsto \lambda \cdot g : X \rightarrow K \end{aligned}$$

mit  $(\lambda \cdot g)(x) := \lambda g(x)$ .

Analog zu Aufgabe 7 (a) auf Übungsblatt 7 lässt sich zeigen, dass  $V$  mit den Operationen  $+$  und  $\cdot$  ein Vektorraum über  $K$  ist. Dies dürfen Sie im Folgenden ohne Beweis verwenden.

Für  $a \in X$  sei

$$\delta_a : X \rightarrow K, x \mapsto \delta_{ax} := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = a \\ 0 & \text{falls } x \neq a. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: Sind  $a_1, \dots, a_n \in X$  paarweise verschieden, so sind  $\delta_{a_1}, \dots, \delta_{a_n} \in V$  linear unabhängig.

- (b) Folgern Sie aus (a), dass die Menge  $\{\delta_a \mid a \in X\}$  linear unabhängig ist.
- (c) Folgern Sie aus (b), dass  $V$  nicht endlich-dimensional ist, wenn  $X$  unendlich ist.
- (d) Sei nun angenommen, dass  $X$  endlich ist und sei  $U := \{\delta_a \mid a \in X\}$ . Zeigen Sie, dass  $V = \langle U \rangle$ . Begründen Sie, dass  $U$  eine Basis von  $V$  ist und geben Sie die Dimension von  $V$  an.

### Lösung

- (a) Seien  $a_1, \dots, a_n \in X$  paarweise verschieden. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{a_i} = 0_V.$$

Für  $1 \leq j \leq n$  gilt dann

$$\lambda_j = \lambda_j \cdot 1_K = \lambda_j \delta_{a_j}(a_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{a_i}(a_j) = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{a_i} \right)(a_j) = 0_V(a_j) = 0_K.$$

Es gilt also  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$ . Damit sind  $\delta_{a_1}, \dots, \delta_{a_n}$  linear unabhängig.

- (b) Setze  $U := \{\delta_a \mid a \in X\}$ . Wir haben zu zeigen, dass  $U$  linear unabhängig ist. Seien  $f_1, \dots, f_n$  paarweise verschiedene Elemente von  $U$ . Gemäß Definition 3.31 (dritter Punkt, letzter Absatz) reicht es, zu zeigen, dass  $f_1, \dots, f_n$  linear unabhängig sind. Wegen  $f_1, \dots, f_n \in U$  existieren  $a_1, \dots, a_n \in X$ , so dass  $f_i = \delta_{a_i}$  für  $1 \leq i \leq n$ . Und da  $f_1, \dots, f_n$  paarweise verschieden sind, müssen auch  $a_1, \dots, a_n$  paarweise verschieden sein. Nach (a) sind  $f_1, \dots, f_n$  also linear unabhängig.
- (c) Angenommen,  $X$  ist unendlich. Wir bezeichnen die Menge  $\{\delta_a \mid a \in X\}$  wieder mit  $U$ . Zunächst zeigen wir, dass  $U$  eine unendliche Menge ist. Sei dazu

$$\varphi : X \rightarrow U, a \mapsto \delta_a.$$

Seien  $a_1, a_2 \in X$  mit  $a_1 \neq a_2$ . Nach Definition von  $\delta_{a_1}$  und  $\delta_{a_2}$  gilt dann  $\delta_{a_1}(a_1) = 1$ , aber  $\delta_{a_2}(a_1) = 0 \neq 1$ . Also gilt  $\varphi(a_1) = \delta_{a_1} \neq \delta_{a_2} = \varphi(a_2)$ . Damit kann ein Element von  $U$  nicht mehr als ein Urbild unter  $\varphi$  haben. Mit anderen Worten ist  $\varphi$  injektiv. Nach Definition von  $U$  ist  $\varphi$  auch surjektiv, insgesamt also bijektiv. Es gilt also  $|X| = |U|$ . Da  $X$  unendlich ist, folgt, dass auch  $U$  unendlich ist.

Nach (b) ist  $U$  linear unabhängig. Es ist also  $U$  eine unendliche linear unabhängige Teilmenge von  $V$ . Nach Korollar 3.48 kann  $V$  damit nicht endlich-dimensional sein.

- (d) Sei nun angenommen, dass  $X$  endlich ist und bezeichne  $U$  wieder die Menge  $\{\delta_a \mid a \in X\}$ . Wir zeigen, dass  $V = \langle U \rangle$  gilt. Sei dazu  $f \in V$ . Für  $x \in X$  sei

$$\lambda_x := f(x) \in K.$$

Weiter sei

$$g := \sum_{x \in X} \lambda_x \delta_x \in \langle U \rangle.$$

Für  $y \in X$  gilt dann

$$g(y) = \left( \sum_{x \in X} \lambda_x \delta_x \right) (y) = \sum_{x \in X} \lambda_x \delta_x(y) = \lambda_y \delta_y(y) = \lambda_y \cdot 1 = f(y),$$

womit

$$f = g \in \langle U \rangle$$

folgt. Da  $f$  ein beliebig gewähltes Element von  $V$  war, gilt also  $V \subseteq \langle U \rangle$ . Da auch  $\langle U \rangle \subseteq V$  gilt, folgt  $V = \langle U \rangle$ .

Da  $U$  nach (b) linear unabhängig ist, folgt, dass  $U$  eine Basis von  $V$  ist. Die Dimension von  $V$  ist dementsprechend gleich  $|U|$ . Es lässt sich wie in (c) zeigen, dass die Abbildung  $X \rightarrow U, a \mapsto \delta_a$  eine Bijektion ist. Damit gilt  $|U| = |X|$  und  $V$  ist  $|X|$ -dimensional.

## Zusatzaufgaben

*Die folgende Aufgabe stellt eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgabe wird nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung zu präsentieren.*

### Aufgabe 8

Sei  $X$  eine beliebige Menge. Es sei  $V := \mathcal{P}(X)$  die Potenzmenge von  $X$ , also die Menge aller Teilmengen von  $X$ . Für  $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$  sei

$$Y + Z := (Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z).$$

Wir definieren eine Skalarmultiplikation

$$\mathbb{Z}/2 \times V \rightarrow V$$

durch

$$[1] \cdot Y := Y$$

$$[0] \cdot Y := \emptyset$$

für alle  $Y \in V = \mathcal{P}(X)$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $V$  zusammen mit  $+$  und  $\cdot$  ein Vektorraum über  $\mathbb{Z}/2$  ist.
- (b) Sei nun angenommen, dass  $X$  nichtleer und endlich ist. Sei  $W$  die Menge aller Teilmengen von  $X$ , die eine gerade Mächtigkeit haben. Zeigen Sie, dass  $W$  ein Unterraum von  $V$  ist.
- (c) Sei weiterhin angenommen, dass  $X$  nichtleer und endlich ist. Sei  $Y$  eine Teilmenge von  $X$  mit ungerader Mächtigkeit. Zeigen Sie, dass  $W$  zusammen mit  $Y$  ganz  $V$  erzeugt.

## Lösung

- (a) Für jede Teilmenge  $Y$  bezeichne  $\overline{Y}$  das Komplement von  $Y$  in  $X$ , also  $\overline{Y} = X \setminus Y$ . Bevor wir zeigen, dass  $V$  zusammen mit  $+$  und  $\cdot$  ein Vektorraum über  $\mathbb{Z}/2$  ist, machen wir eine kurze Vorüberlegung, die uns später helfen wird:

*Vorüberlegung:* Für  $Y_1, Y_2 \in V$  gilt  $Y_1 + Y_2 = (Y_1 \cap \overline{Y_2}) \cup (Y_2 \cap \overline{Y_1})$ .

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
 Y_1 + Y_2 &= (Y_1 \cup Y_2) \setminus (Y_1 \cap Y_2) \\
 &= (Y_1 \cup Y_2) \cap \overline{Y_1 \cap Y_2} \\
 &= (Y_1 \cap \overline{Y_1 \cap Y_2}) \cup (Y_2 \cap \overline{Y_1 \cap Y_2}) && \text{nach Blatt 1, Aufgabe 4} \\
 &= (Y_1 \cap (\overline{Y_1} \cup \overline{Y_2})) \cup (Y_2 \cap (\overline{Y_1} \cup \overline{Y_2})) && \text{nach Blatt 1, Aufgabe 3} \\
 &= ((Y_1 \cap \overline{Y_1}) \cup (Y_1 \cap \overline{Y_2})) \cup ((Y_2 \cap \overline{Y_1}) \cup (Y_2 \cap \overline{Y_2})) && \text{nach Blatt 1, Aufgabe 4} \\
 &= (\emptyset \cup (Y_1 \cap \overline{Y_2})) \cup ((Y_2 \cap \overline{Y_1}) \cup \emptyset) \\
 &= (Y_1 \cap \overline{Y_2}) \cup ((Y_2 \cap \overline{Y_1})).
 \end{aligned}$$

□

Wir zeigen nun, dass  $V$  zusammen mit  $+$  eine abelsche Gruppe ist. Für  $Y_1, Y_2, Y_3 \in V$  gilt unter Verwendung der Aufgaben 3 und 4 auf Blatt 1

$$\begin{aligned}
 (Y_1 + Y_2) + Y_3 &= ((Y_1 \cap \overline{Y_2}) \cup (Y_2 \cap \overline{Y_1})) + Y_3 \\
 &= (((Y_1 \cap \overline{Y_2}) \cup (Y_2 \cap \overline{Y_1})) \cap \overline{Y_3}) \cup (Y_3 \cap \overline{((Y_1 \cap \overline{Y_2}) \cup (Y_2 \cap \overline{Y_1}))}) \\
 &= ((Y_1 \cap \overline{Y_2} \cap \overline{Y_3}) \cup (Y_2 \cap \overline{Y_1} \cap \overline{Y_3})) \cup (Y_3 \cap \overline{Y_1 \cap \overline{Y_2}} \cap \overline{Y_2 \cap \overline{Y_1}}) \\
 &= ((Y_1 \cap \overline{Y_2} \cap \overline{Y_3}) \cup (Y_2 \cap \overline{Y_1} \cap \overline{Y_3})) \cup (Y_3 \cap (\overline{Y_1} \cup Y_2) \cap (\overline{Y_2} \cup Y_1)) \\
 &= ((Y_1 \cap \overline{Y_2} \cap \overline{Y_3}) \cup (Y_2 \cap \overline{Y_1} \cap \overline{Y_3})) \cup (Y_3 \cap ((\overline{Y_1} \cup Y_2) \cap \overline{Y_2}) \cup ((\overline{Y_1} \cup Y_2) \cap Y_1)) \\
 &= ((Y_1 \cap \overline{Y_2} \cap \overline{Y_3}) \cup (Y_2 \cap \overline{Y_1} \cap \overline{Y_3})) \cup (Y_3 \cap ((\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}) \cup (Y_2 \cap Y_1))) \\
 &= (Y_1 \cap \overline{Y_2} \cap \overline{Y_3}) \cup (Y_2 \cap \overline{Y_1} \cap \overline{Y_3}) \cup (Y_3 \cap \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}) \cup (Y_3 \cap Y_2 \cap Y_1) \\
 &= (Y_1 \cap \overline{Y_2} \cap \overline{Y_3}) \cup (\overline{Y_1} \cap Y_2 \cap \overline{Y_3}) \cup (\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} \cap Y_3) \cup (Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Y_1 + (Y_2 + Y_3) &= Y_1 + ((Y_2 \cap \overline{Y_3}) \cup (Y_3 \cap \overline{Y_2})) \\ &= (Y_1 \cap \overline{(Y_2 \cap \overline{Y_3}) \cup (Y_3 \cap \overline{Y_2})}) \cup (((Y_2 \cap \overline{Y_3}) \cup (Y_3 \cap \overline{Y_2})) \cap \overline{Y_1}) \\ &= (Y_1 \cap \overline{Y_2} \cap \overline{Y_3} \cap \overline{Y_3} \cap \overline{Y_2}) \cup ((Y_2 \cap \overline{Y_3} \cap \overline{Y_1}) \cup (Y_3 \cap \overline{Y_2} \cap \overline{Y_1})) \\ &= (Y_1 \cap (\overline{Y_2} \cup Y_3) \cap (\overline{Y_3} \cup Y_2)) \cup ((Y_2 \cap \overline{Y_3} \cap \overline{Y_1}) \cup (Y_3 \cap \overline{Y_2} \cap \overline{Y_1})) \\ &= (Y_1 \cap ((\overline{Y_2} \cup Y_3) \cap \overline{Y_3}) \cup ((\overline{Y_2} \cup Y_3) \cap Y_2)) \cup ((Y_2 \cap \overline{Y_3} \cap \overline{Y_1}) \cup (Y_3 \cap \overline{Y_2} \cap \overline{Y_1})) \\ &= (Y_1 \cap ((\overline{Y_2} \cap \overline{Y_3}) \cup (Y_3 \cap Y_2))) \cup ((Y_2 \cap \overline{Y_3} \cap \overline{Y_1}) \cup (Y_3 \cap \overline{Y_2} \cap \overline{Y_1})) \\ &= (Y_1 \cap \overline{Y_2} \cap \overline{Y_3}) \cup (Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3) \cup (\overline{Y_1} \cap Y_2 \cap \overline{Y_3}) \cup (\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} \cap Y_3) \\ &= (Y_1 \cap \overline{Y_2} \cap \overline{Y_3}) \cup (\overline{Y_1} \cap Y_2 \cap \overline{Y_3}) \cup (\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} \cap Y_3) \cup (Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$(Y_1 + Y_2) + Y_3 = Y_1 + (Y_2 + Y_3).$$

Somit ist  $+$  assoziativ.

Für  $Y_1, Y_2 \in V$  gilt

$$Y_1 + Y_2 = (Y_1 \cup Y_2) \setminus (Y_1 \cap Y_2) = (Y_2 \cup Y_1) \setminus (Y_2 \cap Y_1) = Y_2 + Y_1.$$

Somit ist  $+$  kommutativ.

Für  $Y \in V$  gilt

$$\emptyset + Y = (\emptyset \cup Y) \setminus (\emptyset \cap Y) = Y \setminus \emptyset = Y.$$

Somit ist  $\emptyset$  neutral bezüglich  $+$ .

Für  $Y \in V$  gilt

$$Y + Y = (Y \cup Y) \setminus (Y \cap Y) = Y \setminus Y = \emptyset.$$

Damit ist  $Y$  invers zu sich selbst.

Wir haben somit gezeigt, dass  $V$  zusammen mit  $+$  eine abelsche Gruppe ist.

Um zu zeigen, dass  $V$  zusammen mit der in der Aufgabenstellung definierten Skalarmultiplikation ein Vektorraum über  $\mathbb{Z}/2$  ist, zeigen wir, dass (ii), (iii) und (iv) aus Definition 3.1 erfüllt sind.

Zunächst zeigen wir (ii), d.h. die Assoziativität der Skalarmultiplikation. Sei  $Y \in V$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} ([1] \cdot [1]) \cdot Y &= [1] \cdot Y = Y = [1] \cdot Y = [1] \cdot ([1] \cdot Y), \\ ([0] \cdot [0]) \cdot Y &= [0] \cdot Y = \emptyset = [0] \cdot \emptyset = [0] \cdot ([0] \cdot Y), \\ ([1] \cdot [0]) \cdot Y &= [0] \cdot Y = \emptyset = [1] \cdot \emptyset = [1] \cdot ([0] \cdot Y), \\ ([0] \cdot [1]) \cdot Y &= [0] \cdot Y = \emptyset = [0] \cdot Y = [0] \cdot ([1] \cdot Y). \end{aligned}$$



Damit ist (ii) aus Definition 3.1 erfüllt.

Wir zeigen nun (iii) aus Definition 3.1, also die Distributivgesetze für die Skalarmultiplikation. Für  $Y_1, Y_2 \in V$  gilt

$$\begin{aligned} [0] \cdot (Y_1 + Y_2) &= \emptyset = \emptyset + \emptyset = [0] \cdot Y_1 + [0] \cdot Y_2, \\ [1] \cdot (Y_1 + Y_2) &= Y_1 + Y_2 = [1] \cdot Y_1 + [1] \cdot Y_2. \end{aligned}$$

Für  $Y \in V$  gilt weiterhin

$$\begin{aligned} ([0] + [0]) \cdot Y &= [0] \cdot Y = \emptyset = \emptyset + \emptyset = [0] \cdot Y + [0] \cdot Y, \\ ([1] + [1]) \cdot Y &= [0] \cdot Y = \emptyset = Y + Y = [1] \cdot Y + [1] \cdot Y, \\ ([0] + [1]) \cdot Y &= [1] \cdot Y = Y = \emptyset + Y = [0] \cdot Y + [1] \cdot Y, \\ ([1] + [0]) \cdot Y &= [1] \cdot Y = Y = Y + \emptyset = [1] \cdot Y + [0] \cdot Y. \end{aligned}$$

Damit ist (iii) aus Definition 3.1 erfüllt.

Es ist auch (iv) erfüllt, denn für  $Y \in V$  gilt  $[1] \cdot Y = Y$ .

Damit ist gezeigt, dass  $V$  zusammen mit  $+$  und  $\cdot$  ein Vektorraum über  $\mathbb{Z}/2$  ist.

(b) Wir zeigen, dass (S0), (S1), (S2) aus Definition 3.10 erfüllt ist.

(S0) Es gilt  $\emptyset \in W$ , da  $\emptyset$  wegen  $|\emptyset| = 0$  eine gerade Mächtigkeit hat.

(S1) Seien  $Y, Z \in W$ . Dann sind  $|Y|$  und  $|Z|$  gerade. Wenn  $|Y \cap Z|$  gerade ist, so sind  $|Y \setminus (Y \cap Z)| = |Y| - |Y \cap Z|$  und  $|Z \setminus (Y \cap Z)| = |Z| - |Y \cap Z|$  gerade. Wenn  $|Y \cap Z|$  ungerade ist, so sind  $|Y \setminus (Y \cap Z)| = |Y| - |Y \cap Z|$  und  $|Z \setminus (Y \cap Z)| = |Z| - |Y \cap Z|$  ungerade. Somit sind  $|Y \setminus (Y \cap Z)|$  und  $|Z \setminus (Y \cap Z)|$  beide gerade oder beide ungerade. Damit ist  $|Y \setminus (Y \cap Z)| + |Z \setminus (Y \cap Z)|$  auf jeden Fall gerade. Wir erhalten

$$\begin{aligned} |Y + Z| &= |(Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z)| \\ &= |(Y \cup Z) \cap \overline{Y \cap Z}| \\ &= |(Y \cap \overline{Y \cap Z}) \cup (Z \cap \overline{Y \cap Z})| \\ &= |(Y \setminus (Y \cap Z)) \cup (Z \setminus (Y \cap Z))| \\ &= |(Y \setminus (Y \cap Z))| + |(Z \setminus (Y \cap Z))|. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, weil die Mengen  $Y \setminus (Y \cap Z)$  und  $Z \setminus (Y \cap Z)$  disjunkt sind, d.h. eine leere Schnittmenge haben, und aus der Tatsache, dass für disjunkte endliche Mengen  $X, Y$  die Gleichung  $|X \cup Y| = |X| + |Y|$  gilt. (Letzteres geben wir jetzt mal ohne Beweis an. Sie können sich aber bestimmt eigenständig einen Beweis überlegen).

Da  $|Y \setminus (Y \cap Z)| + |Z \setminus (Y \cap Z)|$ , wie oben beobachtet, gerade ist, folgt, dass  $|Y + Z|$  gerade ist. Folglich gilt  $Y + Z \in W$ .

(S2) Sei  $Y \in W$ . Dann gilt  $[1] \cdot Y = Y \in W$  und  $[0] \cdot Y = \emptyset \in W$ .

- (c) Wir müssen zeigen, dass  $V = \langle W \cup \{Y\} \rangle$  gilt, also dass jedes Element von  $V$  eine Linearkombination von Elementen aus  $W \cup \{Y\}$  ist.

Sei  $y \in Y$ . Dann gilt  $Y_0 := Y \setminus \{y\} \in W$ . Nun gilt

$$Y_0 + Y = (Y_0 \cup Y) \setminus (Y_0 \cap Y) = Y \setminus Y_0 = Y \setminus (Y \setminus \{y\}) = \{y\},$$

also  $\{y\} \in \langle W \cup \{Y\} \rangle$ .

Angenommen,  $x$  ist ein Element von  $X$  mit  $x \neq y$ . Dann gilt  $\{x, y\} \in W$  und

$$\{x, y\} + \{y\} = \{x, y\} \setminus \{y\} = \{x\}.$$

Wegen  $\{x, y\} \in W \subseteq \langle W \cup \{Y\} \rangle$  und  $\{y\} \in \langle W \cup \{Y\} \rangle$  folgt  $\{x\} \in \langle W \cup \{Y\} \rangle$ .

Wir haben damit gezeigt, dass alle einelementigen Teilmengen von  $X$  in  $\langle W \cup \{Y\} \rangle$  liegen. Ebenso gilt  $\emptyset \in W \subseteq \langle W \cup \{Y\} \rangle$ .

Sei nun  $Z$  eine Teilmenge von  $X$  mit  $|Z| \geq 2$  und seien  $z_1, \dots, z_m \in X$  paarweise verschieden, so dass  $Z = \{z_1, \dots, z_m\}$ . Dann gilt

$$Z = \{z_1\} + \{z_2\} + \dots + \{z_m\}.$$

Und da alle einelementigen Teilmengen von  $X$  in  $\langle W \cup \{Y\} \rangle$  liegen, folgt, dass auch  $Z$  in  $\langle W \cup \{Y\} \rangle$  liegt. Somit wird  $V$  von  $W$  zusammen mit  $Y$  erzeugt.