

Hausaufgaben zur Vorbereitung

Die folgende Aufgabe dient Ihnen zur Vorbereitung der neunten Präsenzübung. Der späteste Abgabetermin ist der 15.12. um 23.59 Uhr. Bearbeiten Sie die Aufgabe aber möglichst vor Ihrem neunten Übungstermin!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bearbeiten Sie die Aufgaben, die Sie auf der Opal-Kursseite im Ordner *Hausaufgaben* unter der Überschrift *Vorbereitungsaufgaben für Übung 9* finden.

Erste Vorbereitungsaufgabe

In der ersten Vorbereitungsaufgabe war ein Lückentext gegeben. Die Lücken waren mit den Relationszeichen $<$, $\leq$, $=$, $\geq$ und $>$ auszufüllen. Wir geben hier den kompletten Text mit richtig ausgefüllten Lücken (diese tauchen hier abgesetzt vom Text auf) wieder. Auch geben wir für jede Lücke in Klammern eine Begründung an.

Bemerkung vorab: Wir hätten in dem Lückentext eigentlich voraussetzen sollen, dass die dort vorkommenden Vektorräume endlich-dimensional sind. Denn in dem Text taucht der Begriff der Dimension auf, der in der Vorlesung nur für endlich-dimensionale Vektorräume definiert wurde. Wir hoffen, dass aus dem Kontext klar war, dass die betrachteten Vektorräume endlich-dimensional sein sollen. Es wird wegen dieser Aufgabe niemand an der Klausurzulassung scheitern!

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K (wie gesagt, hätten wir voraussetzen sollen, dass V endlich-dimensional ist) und seien U und W Unterräume von V . Dann gilt

$$\dim_K(U) \leq \dim_K(V)$$

(nach Korollar 3.58) und

$$\dim_K(W) \leq \dim_K(V)$$

(nach Korollar 3.58). Außerdem gilt

$$\dim_K(U + W) \leq \dim_K(U) + \dim_K(W)$$

(nach Lemma 3.60). Wenn

$$\dim_K(U \cap W) = 0$$

gilt, dann gilt

$$\dim_K(U + W) = \dim_K(U) + \dim_K(W)$$

(nach Lemma 3.60). Wenn $\langle U \cup W \rangle = V$ gilt, dann gilt

$$\dim_K(U + W) = \dim_K(V)$$

(Begründung: Nach Lemma 3.25 gilt $\langle U \cup W \rangle = U + W$. Wenn nun $\langle U \cup W \rangle = V$ gilt, dann folgt also $V = U + W$. Und damit gilt natürlich $\dim_K(U + W) = \dim_K(V)$).

Zweite Vorbereitungsaufgabe

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . In der zweiten Vorbereitungsaufgabe waren die richtigen der folgenden Aussagen auszuwählen.

- (1) Wenn drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ linear abhängig sind, dann existieren $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$, so dass v_i ein skalares Vielfaches von v_j ist, d.h. es gilt $v_i = \lambda v_j$ für ein $\lambda \in K$.
- (2) Wenn drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ linear unabhängig sind, dann existieren $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$, so dass v_i ein skalares Vielfaches von v_j ist, d.h. es gilt $v_i = \lambda v_j$ für ein $\lambda \in K$.
- (3) Wenn eine neue Gleichung zu einem linearen Gleichungssystem hinzugefügt wird, kann die Lösungsmenge größer werden.
- (4) Wenn eine neue Gleichung zu einem linearen Gleichungssystem hinzugefügt wird, kann die Lösungsmenge kleiner werden.
- (5) Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $x, y \in K^n$ Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems. Dann ist auch $x + y$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems.

Die Aussage (1) ist falsch. Z. B. sind die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

wegen

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear abhängig, aber keiner der drei ist ein skalares Vielfaches von einem der anderen.

(Nebenbei bemerkt: Wir haben hier mit einem Gegenbeispiel gezeigt, dass die Aussage (1) falsch ist. Immer wenn Sie eine Aussage widerlegen wollen, reicht es, wenn Sie ein Gegenbeispiel angeben. Denn selbst wenn es nur ein Gegenbeispiel gibt, ist die Aussage bereits falsch!)

Die Aussage (2) ist ebenfalls falsch. Wir könnten auch hier wieder irgendein konkretes Gegenbeispiel angeben. Stattdessen wollen wir uns überlegen, dass die Aussage (2) immer falsch ist, also dass alle Tripel (v_1, v_2, v_3) linear unabhängiger Vektoren Gegenbeispiele zu der Aussage sind. Seien also $v_1, v_2, v_3 \in V$ linear unabhängig. Wir behaupten, dass es *keine* $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$ gibt, so dass v_i ein skalares Vielfaches von v_j ist.

Angenommen, dies sei doch der Fall, also dass $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$ existieren, so dass $v_i = \lambda v_j$ für ein $\lambda \in K$. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $i = 1$ und $j = 2$. Dann gilt $(-1)v_1 + \lambda v_2 + 0v_3 = (-1)v_1 + \lambda v_2 = -v_1 + \lambda v_2 = -(\lambda v_2) + \lambda v_2 = 0_V$. Damit sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

Somit existieren, wie behauptet, keine $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$, so dass v_i ein skalares Vielfaches von v_j ist.

Die Aussage in (3) ist falsch. Nehmen wir dazu an, dass wir ein aus n Gleichungen bestehendes lineares Gleichungssystem haben. Nehmen wir nun an, dass wir eine Gleichung ergänzen, so dass wir ein lineares Gleichungssystem mit $n + 1$ Gleichungen bekommen. Jede Lösung des neuen Gleichungssystems erfüllt alle $n + 1$ Gleichungen, also auch die ersten n . Damit ist jede Lösung des neuen linearen Gleichungssystems auch eine Lösung des alten linearen Gleichungssystems. Somit ist es nicht möglich, dass durch das Hinzufügen der neuen Gleichung Lösungen hinzukommen. Die Lösungsmenge kann also nicht größer werden.

Die Aussage in (4) ist richtig. Betrachten wir z. B. das aus nur einer Gleichung bestehende Gleichungssystem

$$x + y = 0.$$

über $\mathbb{R}$. Dieses Gleichungssystem hat die Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir ergänzen nun die Gleichung $x = 1$ und erhalten das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Lösungsmenge ist durch das Hinzufügen einer neuen Gleichung also kleiner geworden.

Die Aussage in (5) ist richtig. Sei A die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems. Dann gilt $Ax = 0_{K^n}$ und $Ay = 0_{K^n}$. Lemma 5.5 impliziert $A(x+y) = Ax + Ay = 0_{K^n} + 0_{K^n} = 0_{K^n}$. Damit ist auch $x + y$ eine Lösung.

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen gemeinsam besprochen. Um Ihren Lernerfolg zu steigern, sollten Sie sich aber bereits im Vorfeld der Übungen mit den Aufgaben auseinandergesetzt haben.

Aufgabe 2

Seien

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 5z = 0 \right\}$$

und

$$U := \langle e_1, e_2 \rangle \quad \text{mit } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Finden Sie Vektoren $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Folgern Sie, dass W ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie eine Basis von W und geben Sie $\dim_{\mathbb{R}}(W)$ an.
- (b) Geben Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ an.
- (c) Beschreiben Sie $W \cap U$. Bestimmen Sie eine Basis von $W \cap U$ und geben Sie $\dim_{\mathbb{R}}(W \cap U)$ an.
- (d) Beweisen Sie mithilfe der Dimensionformel (Lemma 3.60), dass $W + U = \mathbb{R}^3$ gilt.

Lösung

- (a) Es gilt

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 5z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 5z - y \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 5z - y \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Mit $w_1 := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt also $W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Nach Lemma 3.24 ist

$W = \langle w_1, w_2 \rangle$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Wir beweisen, dass w_1, w_2 linear unabhängig sind. Seien $h, k \in \mathbb{R}$, so dass $hw_1 + kw_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$ gilt. Dann

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5h - k \\ k \\ h \end{pmatrix}$$

Die zweite und dritte Zeile implizieren nun $h = 0 = k$. Damit sind w_1 und w_2 linear unabhängig. Wegen $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ folgt, dass $\{w_1, w_2\}$ eine Basis von W ist. Damit gilt $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$.

- (b) Es sind e_1, e_2 Vektoren der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist, da sie eine Basis ist, linear unabhängig. Folglich ist $\{e_1, e_2\}$ eine Teilmenge einer linear unabhängigen Teilmenge von $\mathbb{R}^3$. Teilmengen linear unabhängiger Mengen sind gemäß Vorlesung selbst linear unabhängig. Somit sind e_1 und e_2 linear unabhängig. Natürlich hätten wir dies auch direkt, etwa so wie in (a), nachprüfen können. Wegen $U = \langle e_1, e_2 \rangle$ folgt, dass $\{e_1, e_2\}$ eine Basis von U ist. Damit gilt $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$.

- (c) Wir behaupten, dass

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ -h \\ 0 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R} \right\} =: U_0.$$

$\subseteq$: Sei $u \in U \cap W$. Wegen $u \in U$ existieren $h, k \in \mathbb{R}$ mit $u = he_1 + ke_2 = \begin{pmatrix} h \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$. Wegen $u \in W$ gilt $h + k = h + k - 5 \cdot 0 = 0$, also $k = -h$. Daraus folgt $u = \begin{pmatrix} h \\ -h \\ 0 \end{pmatrix} \in U_0$.

$\supseteq$: Sei $v = \begin{pmatrix} h \\ -h \\ 0 \end{pmatrix} \in U_0$. Dann gilt $v = he_1 - he_2 \in \langle e_1, e_2 \rangle = U$. Wegen $h + (-h) - 5 \cdot 0 = 0$ gilt auch $v \in W$. Also $v \in U \cap W$.

Die obige Beschreibung von $U \cap W$ impliziert

$$U \cap W = \left\{ h \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass ein einzelner Vektor genau dann linear unabhängig ist, wenn er nicht der Nullvektor ist. Somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. Da dieser Vektor außerdem $U \cap W$ erzeugt, bildet er alleine eine Basis von $U \cap W$. Damit gilt $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 1$.

- (d) Nach Lemma 3.60 gilt $\dim_{\mathbb{R}}(U+W) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W) - \dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Korollar 3.59 impliziert $U + W = \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $n := \dim_K(V)$.

- (a) Beweisen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ ein Unterraum U_k von V mit $\dim_K(U_k) = k$ existiert.
- (b) Geben Sie alle Unterräume von $(\mathbb{F}_2)^3$, wobei $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2$ sei, nach der Dimension geordnet an.

Lösung

- (a) Im Falle $n = 0$ ist nichts zu zeigen, da es dann keine natürlichen Zahlen k mit $k \leq n$ gibt (denn nach der in dieser Vorlesung benutzten Definition gehen die natürlichen Zahlen bei 1 los). Nehmen wir also $n \geq 1$ an.

Sei $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Für jede natürliche Zahl k mit $k \leq n$ definieren wir $U_k := \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$. Nach Lemma 3.24 ist U_k für jede solche natürliche Zahl k ein Unterraum von V .

Da $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V ist, sind die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig. Weil $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Teilmenge der Menge $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist und weil Teilmengen linear unabhängiger Mengen gemäß Vorlesung ebenfalls linear unabhängig sind, sind die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig. Da U_k von den Vektoren $v_1, \dots, v_k$ erzeugt wird, folgt, dass $(v_1, \dots, v_k)$ eine Basis von U_k ist. Es ist also U_k ein k -dimensionaler Unterraum von V .

- (b) Weil $\dim(\mathbb{F}_2^3) = 3$ ist, gilt $\dim(U) \in \{0, 1, 2, 3\}$ für alle Unterräume U von $\mathbb{F}_2^3$. Wir listen zuerst alle Elemente von $\mathbb{F}_2^3$ auf:

$$\mathbb{F}_2^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Es gibt einen eindeutigen nulldimensionalen Unterraum, nämlich $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
- Die Unterräume mit Dimension 1 sind genau die Unterräume, die von einem vom Nullvektor verschiedenen Vektor erzeugt werden, also

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

- Wir listen nun die zweidimensionalen Unterräume auf. Zunächst machen wir uns klar, dass die zweidimensionalen Unterräume von $(\mathbb{F}_2)^3$ genau die Unterräume von $(\mathbb{F}_2)^3$ sind, die von zwei verschiedenen Vektoren aus $(\mathbb{F}_2)^3 \setminus \{0_{(\mathbb{F}_2)^3}\}$ erzeugt werden. Wir zeigen zunächst, dass jeder zweidimensionale Unterraum von $(\mathbb{F}_2)^3$ das Erzeugnis zweier verschiedener Vektoren aus $(\mathbb{F}_2)^3 \setminus \{0_{(\mathbb{F}_2)^3}\}$ ist. Sei dazu U ein zweidimensionaler Unterraum von $(\mathbb{F}_2)^3$. Dann hat U eine zweielementige Basis, sagen wir $B = (b_1, b_2)$. Da B als Basis von U auch ein Erzeugendensystem von U ist, gilt $U = \langle b_1, b_2 \rangle$. Weiterhin gilt $b_1, b_2 \in (\mathbb{F}_2)^3 \setminus \{0_{(\mathbb{F}_2)^3}\}$ und $b_1 \neq b_2$, weil b_1 und b_2 linear unabhängig sind (vgl. Bemerkung 3.30 und 3.32 (b)). Somit ist U das Erzeugnis zweier verschiedener Vektoren aus $(\mathbb{F}_2)^3 \setminus \{0_{(\mathbb{F}_2)^3}\}$.

Wir zeigen nun, dass jeder von zwei verschiedenen Vektoren aus $(\mathbb{F}_2)^3 \setminus \{0_{(\mathbb{F}_2)^3}\}$ erzeugte Unterraum von $(\mathbb{F}_2)^3$ zweidimensional ist. Seien also $v_1, v_2 \in (\mathbb{F}_2)^3 \setminus \{0_{(\mathbb{F}_2)^3}\}$ mit $v_1 \neq v_2$ und sei $U := \langle v_1, v_2 \rangle$. Dann gilt $v_1 \notin \{0_{\mathbb{F}_2^3}, v_2\} = \langle v_2 \rangle$ und analog $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$, sodass v_1 und v_2 gemäß Aufgabe 4 (a) von Blatt 8 linear unabhängig sein müssen. Folglich ist (v_1, v_2) eine Basis von U , womit U zweidimensional ist.

Mit den obigen Überlegungen sehen wir, dass es sich bei den zweidimensionalen Unterräumen von $(\mathbb{F}_2)^3$ genau um die folgenden Unterräume handelt:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

- Es gibt nur einen dreidimensionalen Unterraum von $(\mathbb{F}_2)^3$, nämlich $(\mathbb{F}_2)^3$ selbst.

Aufgabe 4

Seien V ein Vektorraum über einem Körper K und seien v_i , $i \in I$, Elemente aus V (für eine Indexmenge I). Sei

$$\phi : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \mathcal{P}(V), J \mapsto \langle v_j \mid j \in J \rangle.$$

(a) Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Die Vektoren v_i für $i \in I$ sind linear unabhängig.
- (ii) ϕ ist injektiv.

(b) Seien $\mathcal{U}(V) := \{U \subseteq V \mid U \text{ ist ein Unterraum von } V\}$ und $\psi : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \mathcal{U}(V)$, $\psi(J) := \phi(J)$. Beschreiben Sie die Beziehung zwischen ϕ und ψ . Wenn ϕ oder ψ injektiv (bzw. surjektiv) ist, was können wir über die jeweils andere Abbildung hinsichtlich Injektivität (bzw. Surjektivität) sagen?

(c) Wenn V unendlich-dimensional ist, dann schreiben wir $\dim_K(V) = \infty$. Sei

$$f : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}, f(J) = \dim_K(\phi(J)).$$

Zeigen Sie: Wenn f surjektiv ist, dann ist V unendlich-dimensional. Zeigen Sie, dass die Umkehrung im Allgemeinen falsch ist. Wenn V unendlich-dimensional ist, können Sie eine Bedingung an die Vektoren v_i , $i \in I$, stellen, unter der die Abbildung f surjektiv ist?

Lösung

Hinweis: Diese Aufgabe hat ein leicht gehobenes Niveau. Wenn Sie Schwierigkeiten dabei haben, ist das kein Grund zur Sorge. Wenn Sie aber Zeit haben und die Lösung langsam und in Ruhe durchgehen und versuchen, sie genau zu verstehen, wird das sicherlich einen guten Lerneffekt haben. In der Klausur sind Aufgaben wie diese aber eher nicht zu erwarten.

(a) Wir zeigen (i) $\Rightarrow$ (ii) und (ii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii): Wir zeigen die Kontraposition, also $\neg(\text{ii}) \rightarrow \neg(\text{i})$. Nehmen wir also an, dass (ii) nicht gilt, also dass ϕ nicht injektiv ist. Dann existieren zwei voneinander verschiedene Teilmengen $J, L \subseteq I$ mit $\phi(J) = \phi(L)$. Das bedeutet $\langle v_j \mid j \in J \rangle = \langle v_l \mid l \in L \rangle$. Weil $J \neq L$ gilt, existiert ein $j \in J \setminus L$ oder ein $l \in L \setminus J$. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass ein $j \in J \setminus L$ existiert. Wegen $v_j \in \phi(J) = \phi(L)$ lässt sich v_j als Linearkombination der Vektoren aus $\{v_\ell \mid \ell \in L\}$ schreiben. Wegen $j \notin L$ impliziert Lemma 3.35, dass die Vektoren v_i , $i \in I$, nicht linear unabhängig sind. Es gilt also, wie gewünscht, $\neg(\text{i})$.

(ii) $\implies$ (i): Wir beweisen wieder die Kontraposition, also $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$. Wir nehmen also an, dass die Vektoren v_i , $i \in I$, nicht linear unabhängig sind, und folgern daraus, dass ϕ nicht injektiv ist. Sei also angenommen, dass die Vektoren v_i , $i \in I$, nicht linear unabhängig sind, d.h. sie sind linear abhängig. Es existiert also eine Linearkombination

$$\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0_V,$$

so dass mindestens ein $j \in I$ mit $\lambda_j \neq 0_K$ existiert. Setze $I^* := I \setminus \{j\}$. Dann gilt

$$\lambda_j v_j = - \sum_{i \in I^*} \lambda_i v_i$$

und damit

$$v_j = \sum_{i \in I^*} -\lambda_j^{-1} \lambda_i v_i.$$

Beachten Sie: Wenn $|I| = 1$ und damit $I^* = \emptyset$ gilt, dann ist die Summe auf der rechten Seite leer, also gemäß S. 35 im Skript gleich 0_V .

Es gilt nun $v_j \in \langle v_i \mid i \in I^* \rangle$.

Beachten Sie: Gemäß der Konventionen nach Bemerkung 3.21 ist das Erzeugnis auf der rechten Seite gleich $\{0_V\}$, wenn $|I| = 1$ und damit $I^* = \emptyset$ gilt.

Eine Anwendung von Lemma 3.26 (c) liefert nun

$$\phi(I^*) = \langle v_i \mid i \in I^* \rangle = \langle v_i \mid i \in I \rangle = \phi(I).$$

Wegen $I \neq I^*$ folgt hieraus, dass ϕ nicht injektiv ist, also $\neg(ii)$.

(b) Sei

$$\iota : \mathcal{U}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V), W \mapsto W.$$

Es ist also ι die Abbildung von $\mathcal{U}(V)$ nach $\mathcal{P}(V)$, die jeden Unterraum von V auf sich selbst abbildet. Es handelt sich also sozusagen fast um die Identität auf $\mathcal{U}(V)$. Der einzige Unterschied zur Identitätsabbildung ist, dass der Zielbereich von ι nicht $\mathcal{U}(V)$, sondern $\mathcal{P}(V)$ ist. Klarerweise ist ι injektiv.

Nach Definition von ϕ und ψ gilt $\iota \circ \psi = \phi$. Dies stellen wir durch folgendes Diagramm dar:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}(I) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{U}(V) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{P}(V) \\ & & \searrow \phi & & \end{array}$$

Es ist ψ injektiv genau dann, wenn ϕ injektiv ist. Denn wenn ψ injektiv ist, dann ist ϕ als Komposition injektiver Abbildungen ebenfalls injektiv. Und wenn ϕ injektiv ist, dann

ist ψ nach Aufgabe 8 (a) auf Blatt 3 injektiv. Die Injektivität von ψ und ϕ ist nach (a) äquivalent zur linearen Unabhängigkeit der Vektoren $v_i, i \in I$.

Wenn $V \neq \{0_V\}$ ist, dann ist jede Teilmenge von V , die den Nullvektor nicht enthält, *kein* Unterraum von V . Insbesondere sind sowohl ι wie auch ϕ im Falle $V \neq \{0_V\}$ nicht surjektiv.

Wenn also ϕ surjektiv ist, dann ist $V = \{0_V\}$, womit $\mathcal{U}(V) = \mathcal{P}(V)$, sodass $\psi = \phi$, womit auch ψ surjektiv ist.

Ist ψ surjektiv, so können wir hingegen nicht folgern, dass auch ϕ surjektiv ist. Z. B. ist ψ surjektiv, wenn $\{v_i \mid i \in I\} = V$ gilt. Wenn aber $V \neq \{0_V\}$ gilt, ist ϕ hingegen nicht surjektiv (wie oben beobachtet).

- (c) Angenommen, f ist surjektiv. Dann existiert ein $J \subseteq I$ mit $f(J) = \infty$. Es hat also V einen unendlich-dimensionalen Unterraum. Nach Vorlesung sind Unterräume endlich-dimensionaler Vektorräume wieder endlich-dimensional. Folglich muss V unendlich-dimensional sein.

Wir zeigen nun, dass die Umkehrung im Allgemeinen falsch ist, also dass V unendlich-dimensional und f gleichzeitig nicht surjektiv sein kann. Und das ist ganz einfach zu sehen: Wenn nämlich V ein unendlich-dimensionaler Vektorraum ist, aber I endlich ist, dann ist $\phi(J)$ für jedes $J \subseteq I$ ein endlich erzeugter Vektorraum und damit laut Vorlesung endlich-dimensional. Folglich hat ∞ kein Urbild unter f , womit f nicht surjektiv ist.

Wenn V unendlich-dimensional ist, können wir eine Bedingung an die $v_i, i \in I$, stellen, damit f surjektiv ist? Ja, das ist der Fall, wenn die Vektoren $v_i, i \in I$, eine Basis von V bilden. Dann gilt nämlich $f(I) = \infty$. Und wenn wir für ein $k \geq 0$ genau k paarweise verschiedene Vektoren aus den $v_i, i \in I$, auswählen, sagen wir $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$, dann erzeugen diese einen k -dimensionalen Unterraum, und damit gilt $f(\{i_1, \dots, i_k\}) = k$.

Aufgabe 5

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem über dem Körper K , indem Sie die folgenden Schritte ausführen:

- Bilden Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems und bringen Sie diese durch elementare Zeilenumformungen in reduzierte Stufenform.
- Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

- (a) $K = \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\5x_1 - 11x_2 + 9x_3 &= 0\end{aligned}$$

(b) $K = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 &= 0 \\3x_1 - (\sqrt{2} + 6)x_3 &= 0 \\-x_1 + x_2 + 3x_3 &= -1\end{aligned}$$

(c) $K = \mathbb{Z}/11$.

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 7x_4 - x_5 &= 0 \\5x_1 + 6x_2 + x_3 &= 0 \\9x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -1 \\8x_2 + 2x_4 + 3x_5 &= 2\end{aligned}$$

Lösung

Wir schreiben z_i für i -te Zeile eines Gleichungssystems. Die Schreibweise $z_i \longrightarrow az_i + bz_j$ bedeutet, dass die Zeile z_i durch $az_i + bz_j$ ersetzt wird; $z_i \leftrightarrow z_j$ bedeutet, dass die Zeilen z_i und z_j vertauscht werden.

1. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 5 & 0 \\2 & -4 & 2 & 0 \\5 & -11 & 9 & 0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 5 & 0 \\2 & -4 & 2 & 0 \\5 & -11 & 9 & 0\end{array}\right) \quad z_3 \longrightarrow 5z_2 - 2z_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 5 & 0 \\2 & -4 & 2 & 0 \\0 & 2 & 2 & 0\end{array}\right) \quad z_2 \longrightarrow z_2 - 2z_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 5 & 0 \\0 & 2 & -8 & 0 \\0 & 2 & 2 & 0\end{array}\right) \quad z_3 \longrightarrow z_2 - z_3; \quad z_2 \longrightarrow \frac{1}{2}z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 5 & 0 \\0 & 1 & -4 & 0 \\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \quad z_1 \longrightarrow z_1 + 3z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -7 & 0 \\0 & 1 & -4 & 0 \\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}x_1 - 7x_3 &= 0 \\x_2 - 4x_3 &= 0 \\0 &= 0.\end{aligned}$$

Deswegen ist die Lösungsmenge $L = \left\{ \begin{pmatrix} 7t \\ 4t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Q} \right\}$.

2. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 3 & 0 & -\sqrt{2} + 6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 3 & 0 & -\sqrt{2} + 6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \quad z_3 \longrightarrow z_2 + 3z_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 3 & 0 & -\sqrt{2} + 6 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{2} + 15 & -3 \end{array} \right) \quad z_2 \longrightarrow z_2 - 3z_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 6 & 2\sqrt{2} + 6 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{2} + 15 & -3 \end{array} \right) \quad z_3 \longrightarrow z_2 - 2z_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 6 & 2\sqrt{2} + 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4\sqrt{2} - 24 & -6 \end{array} \right) \quad z_2 \longrightarrow \frac{1}{2}z_2; \quad z_3 \longrightarrow \frac{1}{2}z_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} + 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} - 12 & -3 \end{array} \right) \quad z_2 \longrightarrow z_2 - \left(\frac{\sqrt{2} + 3}{2\sqrt{2} - 12} \right) z_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{3(\sqrt{2}+3)}{2(\sqrt{2}-6)} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} - 12 & -3 \end{array} \right) \quad z_1 \longrightarrow 3z_1 + 2z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3\sqrt{2} & \frac{3(\sqrt{2}+3)}{\sqrt{2}-6} \\ 0 & 3 & 0 & \frac{3(\sqrt{2}+3)}{2(\sqrt{2}-6)} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} - 12 & -3 \end{array} \right) \quad z_1 \longrightarrow z_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 12} z_3$$

Wir rechnen zuerst $\frac{3(\sqrt{2}+3)}{\sqrt{2}-6} + (-3)\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{(2)-12}} = \frac{6\sqrt{2}+18-9\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-12} = \frac{-3(\sqrt{2}-6)}{2(\sqrt{2}-6)} = -\frac{3}{2}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \left| \begin{array}{c} -\frac{3}{2} \\ \frac{3(\sqrt{2}+3)}{2(\sqrt{2}-6)} \\ -3 \end{array} \right. \\ 0 & 3 & 0 & \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2}-12 & \end{pmatrix} \quad z_1 \longrightarrow \frac{1}{3}z_1; \quad z_2 \longrightarrow \frac{1}{3}z_2; \quad z_3 \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}-12}z_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \left| \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}+3}{2(\sqrt{2}-6)} \\ -\frac{3}{2(\sqrt{2}-6)} \end{array} \right. \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}+3}{2(\sqrt{2}-6)}$$

$$x_3 = -\frac{3}{2(\sqrt{2}-6)}$$

und die Lösungsmenge ist $L = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}+3}{2(\sqrt{2}-6)} \\ -\frac{3}{2(\sqrt{2}-6)} \end{pmatrix} \right\}$.

3. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

In $\mathbb{Z}/11$ gelten $-1 = 10$, $-2 = 9$, $-3 = 8$, $-4 = 7$, $-5 = 6 \dots$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right) \quad z_3 \longrightarrow z_3 + 2z_1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right) \quad z_3 \longrightarrow 8z_3$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right) \quad z_4 \longrightarrow z_4 + 3z_3$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad z_2 \longrightarrow z_2 + 6z_1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad z_3 \longrightarrow z_2 - 2z_3; \quad z_4 \longrightarrow 3z_4$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \right) \quad z_4 \longrightarrow z_3 - 2z_4$$

$$\begin{array}{lcl}
 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 5 \end{array} \right) & & z_2 \longrightarrow 6z_2; \ z_3 \longrightarrow 6z_3; \ z_4 \longrightarrow -2z_4 \\
 \\
 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) & & z_1 \longrightarrow z_1 + 4z_4; \ z_2 \longrightarrow z_2 + z_4; \ z_3 \longrightarrow z_3 + 5z_4 \\
 \\
 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) & & z_2 \longrightarrow z_2 + 5z_3 \\
 \\
 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) & & z_1 \longrightarrow z_1 + 8z_2 \\
 \\
 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) & &
 \end{array}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
 x_1 + 6x_5 &= 4 \\
 x_2 + 4x_5 &= 0 \\
 x_3 + x_5 &= 2 \\
 x_4 + 2x_5 &= 1
 \end{aligned}$$

Sei $t \in \mathbb{Z}/11$ ein Parameter und $x_5 = t$. Dann

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 4 - 6t = 4 + 5t \\
 x_2 &= -4t = 7t \\
 x_3 &= 2 - t \\
 x_4 &= 1 - 2t \\
 x_5 &= t
 \end{aligned}$$

und die Lösungsmenge ist $L = \left\{ \begin{pmatrix} 4 - 6t \\ -4t \\ 2 - t \\ 1 - 2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}/11 \right\}.$

Hausaufgaben zur Nachbereitung

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis zum 22.12., 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem indem Sie die folgenden Schritte ausführen:

- Bilden Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems und bringen Sie diese durch elementare Zeilenumformungen in reduzierte Stufenform.
- Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Seien $L_{\mathbb{Q}}$ die Lösungsmenge über $\mathbb{Q}$ und $L_{\mathbb{R}}$ die Lösungsmenge über $\mathbb{R}$. Was ist die Beziehung zwischen $L_{\mathbb{Q}}$ und $L_{\mathbb{R}}$? Geben Sie auch $L_{\mathbb{Z}/19}$, also die Lösungsmenge über $\mathbb{Z}/19$, an.

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\x_1 + 4x_2 + 2x_4 &= 0 \\x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 &= 1 \\x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 13x_4 &= 4\end{aligned}$$

Lösung

Wir schreiben z_i für i -te Zeile eines Gleichungssystems. Die Schreibweise $z_i \rightarrow az_i + bz_j$ bedeutet, dass die Zeile z_i durch $az_i + bz_j$ ersetzt wird; $z_i \leftrightarrow z_j$ bedeutet, dass die Zeilen z_i und z_j vertauscht werden. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 13 & 4 \end{array} \right)$$

Wir lösen das System für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ gleichzeitig.

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 & | & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 1 & | & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 13 & | & 4 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/2 & | & 0 \\ 0 & 7 & 3 & -4 & | & 1 \\ 0 & 8 & -1 & 8 & | & 4 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8/3 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 23/3 & -1/2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 13/3 & 12 & | & 4 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8/3 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/46 & | & 3/23 \\ 0 & 0 & 13/3 & 12 & | & 4 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 96/23 & | & -8/23 \\ 0 & 1 & 0 & -25/46 & | & 2/23 \\ 0 & 0 & 1 & -3/46 & | & 3/23 \\ 0 & 0 & 0 & 565/46 & | & 79/23 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 96/23 & | & -8/23 \\ 0 & 1 & 0 & -25/46 & | & 2/23 \\ 0 & 0 & 1 & -3/46 & | & 3/23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 158/565 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -856/565 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 27/113 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 84/565 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 158/565 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 z_2 \longrightarrow \frac{1}{6}(z_2 - z_1); \quad z_3 \longrightarrow z_3 - z_1; \quad z_4 \longrightarrow z_4 - z_1 \\
 z_1 \longrightarrow z_1 + 2z_2; \quad z_3 \longrightarrow z_3 - 7z_2; \quad z_4 \longrightarrow z_4 - 8z_2 \\
 z_3 \longrightarrow \frac{3}{23}z_3 \\
 z_1 \longrightarrow z_1 - \frac{8}{3}z_3; \quad z_2 \longrightarrow z_2 + \frac{2}{3}z_3; \quad z_4 \longrightarrow z_4 - \frac{13}{3}z_3 \\
 z_4 \longrightarrow \frac{46}{565}z_4 \\
 z_1 \longrightarrow z_1 - \frac{96}{23}z_4; \quad z_2 \longrightarrow z_2 + \frac{25}{46}z_4; \quad z_3 \longrightarrow z_3 + \frac{3}{46}z_4
 \end{array}$$

Damit haben wir

$$\begin{array}{l}
 x_1 = -856/565 \\
 x_2 = 27/113 \\
 x_3 = 84/565 \\
 x_4 = 158/565
 \end{array}$$

$$\text{und es gilt } L_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} -856/565 \\ 27/113 \\ 84/565 \\ 158/565 \end{pmatrix} \right\} = L_{\mathbb{Q}}.$$

Weil wir nie durch Vielfache von 19 geteilt haben, erhalten wir die Lösung des LGS über $\mathbb{Z}/19$, indem wir den Lösungsvektor des LGS über $\mathbb{R}$ hernehmen und seine Einträge als Elemente von $\mathbb{Z}/19$ interpretieren. Es ist

$$\begin{aligned} 565 &= 19 \cdot 30 - 5 \\ 113 &= 19 \cdot 6 - 1 \\ -856 &= 19 \cdot (-45) - 1 \\ 27 &= 19 \cdot 1 + 8 \\ 84 &= 19 \cdot 4 + 8 \\ 158 &= 19 \cdot 8 + 6 \\ 20 &= 19 + 1. \end{aligned}$$

In $\mathbb{Z}/19$ gilt also

$$\begin{aligned} 565 &= -5 = 14 \\ 113 &= -1 = 18 \\ -856 &= -1 = 18 \\ 27 &= 8 \\ 84 &= 8 \\ 158 &= 6 \\ 20 &= 1. \end{aligned}$$

In $\mathbb{Z}/19$ gilt weiterhin $14^{-1} = 15$, denn $14 \cdot 15 = 210 = 1$ in $\mathbb{Z}/19$. Ebenso gilt $18^{-1} = 18$ in $\mathbb{Z}/19$. Nun gilt in $\mathbb{Z}/19$

$$\begin{aligned} x_1 &= (-856) \cdot 565^{-1} = 18 \cdot 14^{-1} = 18 \cdot 15 = 270 = 4 \\ x_2 &= 27 \cdot 113^{-1} = 8 \cdot 18^{-1} = 8 \cdot 18 = 11 \\ x_3 &= 84 \cdot 565^{-1} = 8 \cdot 14^{-1} = 8 \cdot 15 = 120 = 6 \\ x_4 &= 158 \cdot 565^{-1} = 6 \cdot 14^{-1} = 6 \cdot 15 = 90 = 14. \end{aligned}$$

$$\text{Die Lösung über } \mathbb{Z}/19 \text{ lautet also } \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alternativ könnte man das LGS über $\mathbb{Z}/19$ noch einmal von vorne lösen, ohne auf die Lösungsmenge über $\mathbb{R}$ zurückzugreifen. Dann würde man selbstverständlich dieselbe Lösung erhalten.

Warnung: Hat man ein LGS über $\mathbb{R}$ gelöst und möchte dann die Lösung über $\mathbb{Z}/p$ für eine Primzahl p wissen, dann kann man diese nur dann aus der Lösung über $\mathbb{R}$ ableiten (etwa so wie wir es gerade gemacht haben), wenn man beim Lösen des LGS über $\mathbb{R}$ nirgends durch p geteilt hat.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K .

- (a) Seien U und W Unterräume von V mit $U \cap W = \{0_V\}$. Zeigen Sie: Wenn B_U eine Basis von U und B_W eine Basis von W ist, dann ist $B_U \cup B_W$ eine Basis von $U + W$.

Sei von nun an angenommen, dass V endlich-dimensional ist. Ein Unterraum H von V heißt *Hyperebene* von V , falls $\dim_K(H) = \dim_K(V) - 1$ ist. Man zeige:

- (b) Sind H eine Hyperebene von V und U ein Unterraum von V mit $U \not\subseteq H$, so ist $\dim_K(U \cap H) = \dim_K(U) - 1$.
- (c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Hyperebenen $H_1, \dots, H_n$ von V gilt:

$$\dim_K \left(\bigcap_{i=1}^n H_i \right) \geq \dim_K(V) - n.$$

Lösung

- (a) Nach Lemma 3.27 gilt

$$U + W = \langle B_U \rangle + \langle B_W \rangle = \langle B_U \cup B_W \rangle,$$

sodass $B_U \cup B_W$ ein Erzeugendensystem von $U + W$ ist. Wir müssen daher nur zeigen, dass $B_U \cup B_W$ linear unabhängig ist.

Dazu betrachten wir eine Linearkombination

$$\sum_{b \in B_U} x_b b + \sum_{b' \in B_W} y_{b'} b' = 0_V.$$

Dann gilt

$$\sum_{b \in B_U} x_b b = - \sum_{b' \in B_W} y_{b'} b' \in U \cap W = \{0_V\}.$$

Weil B_U bzw. B_W Basen von U bzw. W sind, folgt $x_b = 0$ für alle $b \in B_U$ und $y_{b'} = 0$ für alle $b' \in B_W$. Damit ist $B_U \cup B_W$ linear unabhängig.

- (b) Weil $U \not\subseteq H$ gilt, existiert ein Vektor $u \in U \setminus H$. Nach der Definition von $U + H$ sind H und U Unterräume von $U + H$. Der (oben erwähnte) Vektor u ist also ein Element von $U + H$, welches nicht in H liegt. Damit ist H ein echter Unterraum von $U + H$, d.h. es gilt $H \neq U + H$. Nach Korollar 3.59 gilt damit $\dim_K(H) \neq \dim(U + H)$. Korollar 3.58 impliziert nun $\dim_K(H) < \dim_K(U + H)$.

Da H eine Hyperebene ist, gilt $\dim_K(H) = \dim_K(V) - 1$. Es folgt $\dim_K(V) - 1 < \dim_K(U + H)$, also $\dim_K(U + H) \geq \dim_K(V)$. Gemäß Korollar 3.58 folgt daraus schon $\dim_K(U + H) = \dim_K(V)$.

Unter Verwendung von Lemma 3.60 folgt

$$\begin{aligned}\dim_K(V) &= \dim_K(U + H) = \dim_K(U) + \dim_K(H) - \dim_K(U \cap H) = \\ &= \dim_K(U) + \dim_K(V) - 1 - \dim_K(U \cap H)\end{aligned}$$

sodass

$$\dim_K(U \cap H) = \dim_K(U) - 1.$$

- (c) Wir benutzen Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Sei $A(n)$ die Aussage

$\dim_K\left(\bigcap_{i=1}^n H_i\right) \geq \dim_K(V) - n$ gilt für alle Hyperebenen $H_1, \dots, H_n$ von V .

Induktionsanfang $n = 1$: Wenn $n = 1$ ist, dann $\dim_K(H_1) = \dim_K(V) - 1$, sodass $A(1)$ gilt.

Induktionsschritt: Sei ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so dass $A(n)$ richtig ist (Induktionsvoraussetzung). Wir wollen zeigen, dass auch $A(n+1)$ richtig ist. Wir wollen also zeigen, dass für alle Hyperebenen $H_1, \dots, H_{n+1}$ von V die Ungleichung

$$\dim_K\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} H_i\right) \geq \dim_K(V) - (n+1)$$

erfüllt ist.

Setze $U := \bigcap_{i=1}^n H_i$. Wenn $U \subseteq H_{n+1}$ gilt, dann gilt $U \cap H_{n+1} = U$ und wir erhalten unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung

$$\dim_K\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} H_i\right) = \dim_K(U \cap H_{n+1}) = \dim_K(U) \geq \dim_K(V) - n > \dim_K(V) - (n+1).$$

Wenn $U \not\subseteq H_{n+1}$ gilt, dann erhalten wir unter der Verwendung von (b) und unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung

$$\dim_K\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} H_i\right) = \dim_K(U \cap H_{n+1}) = \dim_K(U) - 1 \stackrel{IA}{\geq} \dim_K(V) - n - 1 = \dim_K(V) - (n+1).$$

Zusatzaufgabe

Die folgenden Aufgaben stellen eine besondere Herausforderung dar. Die Aufgaben werden nicht bewertet. Wenn Sie meinen, eine vollständige Lösung zu haben, sind Sie eingeladen, diese in Ihrer Übung zu präsentieren.

Aufgabe 8

Wir betrachten den Vektorraum aus Aufgabe 8 von Übungsblatt 8 und verwenden die in dieser Aufgabe eingeführte Notation.

- (a) Zeigen Sie, dass W eine Hyperebene von V ist.
- (b) Nutzen Sie (a), um einen neuen Beweis der Aussage aus Aufgabe 7 von Übungsblatt 4 anzugeben.

Lösung

- (a) Nach Aufgabe 8(b) des Übungsblatts 8 ist W ein Unterraum von V .
Sei $Y \subseteq X$, $Y \notin W$ (d.h., dass $|Y|$ ungerade ist). Wir zeigen, dass $\langle W \cup \{Y\} \rangle = V$ gilt.
Wir können Y so wählen, dass $Y = \{y\}$. Sei $Z \in V \setminus W$, d.h. $|Z|$ ist ungerade.

- (i) Wenn $y \in Z$ gilt, dann gilt $Z + Y = (Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z) = Z \setminus Y$.
- (ii) Wenn $y \notin Z$ gilt, dann gilt $Z + Y = (Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z) = (Y \cup Z) \setminus \emptyset = Y \cup Z$.

Weil beide $|Z \setminus Y| = |Z| - 1$ im Fall (i) und $|Y \cup Z| = |Z| + 1$ im Fall (ii) gerade sind, sind sie in W enthalten. Dann haben wir

- (i) $(Z + Y) + Y = ((Z \setminus Y) \cup Y) \setminus ((Z \setminus Y) \cap Y) = Z \setminus \emptyset = Z \in \langle W \cup \{Y\} \rangle$;
- (ii) $(Z + Y) + Y = ((Z \cup Y) \cup Y) \setminus ((Z \cup Y) \cap Y) = (Z \cup Y) \setminus Y = Z \in \langle W \cup \{Y\} \rangle$.

Daraus folgt, dass $\langle W \cup \{Y\} \rangle$ alle Elemente von V enthält, d.h. $\langle W \cup \{Y\} \rangle = V$ gilt.
Weil $W \cap \langle \{Y\} \rangle = \{0_V\}$, gilt $\dim(V) = \dim(\langle W \cup \{Y\} \rangle) = \dim(W) + \dim(\langle Y \rangle) - \dim(W \cap \langle \{Y\} \rangle) = \dim(W) + 1$, sodass W eine Hyperebene ist.

- (b) Sei $\dim(V) = n$, sodass $\dim(W) = n - 1$. Weil $|\mathbb{Z}/2| = 2$ ist, gelten $|V| = 2^n$ und danach $|W| = 2^{n-1} = |V|/2$. Sei $U \subseteq V$ die Teilmenge aller Elemente $X \in V$ mit $|X|$ ungerade. Weil $U \cap W = \emptyset$ und $X \notin W$ genau dann, wenn $|X|$ ungerade ist (mit $X \in V$), gilt $U = V \setminus W$ und $|U| = |V| - |W| = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1} = |W|$.

Aufgabe 9

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Sei $e := \sum_{i=1}^n v_i$ und $u_j = e - v_j$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Man zeige: $\{u_j \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$ ist genau dann Basis von V , wenn $n - 1$ nicht von $\text{char}(K)$ geteilt wird.

Lösung

Zu zeigen

$$\{u_j \mid j \in \{1, \dots, n\}\} \text{ ist eine Basis von } V \iff \text{char}(K) \nmid (n - 1)$$

- ($\implies$) Sei $A := \{u_j \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$ eine Basis und $B := \{v_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$. Nehmen Sie

$$w := \sum_{j=1}^n u_j.$$

Dann

$$\begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^n (e - v_j) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n v_i - v_j \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_i - \sum_{j=1}^n v_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i - \sum_{j=1}^n v_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_i - \sum_{j=1}^n v_j = n \left(\sum_{i=1}^n v_i \right) - \sum_{j=1}^n v_j = (n - 1) \sum_{j=1}^n v_j \end{aligned}$$

Weil B eine Basis ist, gilt $w \neq 0_V$ genau dann, wenn $\text{char}(K) \nmid (n - 1)$ gilt. Weil A auch eine Basis ist, gilt $w \neq 0_V$ und d.h., dass $\text{char}(K) \nmid (n - 1)$ auch gilt.

- ($\impliedby$) Angenommen $\text{char}(K) \nmid (n - 1)$. Weil $\dim_K(V) = n$ ist, müssen wir nur zeigen, dass A l.u. ist. Sei

$$\sum_{j=1}^n k_j u_j = 0_V$$

mit $k_j \in K$. Dann

$$\begin{aligned} 0_V &= \sum_{j=1}^n k_j (e - v_j) = \sum_{j=1}^n k_j \left(\sum_{i=1}^n v_i - v_j \right) = \sum_{j=1}^n k_j \left(\sum_{i=1}^n v_i \right) - \sum_{j=1}^n k_j v_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n k_j v_i - \sum_{j=1}^n k_j v_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_j v_i - \sum_{i=1}^n k_i v_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n k_j \right) v_i - \sum_{i=1}^n k_i v_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n k_j - k_i \right) v_i \end{aligned}$$

Weil B eine Basis ist, für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\left(\sum_{j=1}^n k_j\right) - k_i = 0$. Das heißt, dass

$$\sum_{j=1}^n k_j = k_i \quad (\star)$$

gilt, sodass sie alle gleich sind. Sei $k = k_i$ (für alle $i \in \{1, \dots, n\}$), dann impliziert $(\star)$

$$k = \sum_{j=1}^n k = nk.$$

Daraus folgt, dass $(n-1)k = 0$ in K gilt; weil $\text{char}(K) \nmid (n-1)$, muss $k = 0$ sein. Dann gilt $k_i = k = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und danach ist A eine Basis.