

Def: Seien V und W zwei VR über einem Körper K und sei $\varphi: V \rightarrow W$ eine Abbildung. Dann ist φ ein Monomorphismus, falls φ injektiv und linear ist.

Lemma 6.21: Sei $\varphi: V \rightarrow W$ linear.
 φ Monomorphismus $\Leftrightarrow \ker(\varphi) = \{0_V\}$

Aufgabe 2: Sei $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}$.

Um Lemma 6.21 anwenden zu können, zeigen wir zuerst, dass φ linear ist.

Beispiel 6.5 (Skript): Sei K ein Körper, $n, m \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{n \times m}(K)$. Dann ist die Abbildung

$$K^m \rightarrow K^n, x \mapsto Ax$$

linear.

Frage: Finden wir eine Matrix $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ mit

$$\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir wählen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und somit φ nach Beispiel 6.5 linear.

Es gilt

$$\begin{aligned} \ker(\varphi) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(\varphi)$ gilt also $x+y=0=x-y$,
 also $y=-y$, also $2y=y+y=0$, also $y=0$.

Mit $0=x+y=x+0$ gilt $x=0$. Also $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es folgt $\ker(\varphi) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, ebenso $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(\varphi)$.

Somit $\ker(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Somit ist φ ein Monomorphismus.

Anderes Bsp.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear.

Es gilt $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

also $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(f)$.

$\Rightarrow f$ kein Mono

Aufgabe 3: Sei

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y-w \\ 2x \\ z+w \\ x+z+w \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Beh: f ist linear.

Bew: Man kann dies einseitig direkt nachrechnen (wie auf Blatt 10 in Aufgabe 3) oder man beobachtet, dass

$$\begin{pmatrix} 2x-w \\ 2x \\ z+w \\ x+z+w \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

und wendet Bsp. 6.1 an.

(b) ges: $\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$

① Berechne $f(e_i)$, $1 \leq i \leq 4$

$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(e_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

② Schreibe $f(e_i)$ als LK der Vektoren e_1, e_2, e_3, e_4 .

$$f(e_1) = \underline{0 \cdot e_1} + \underline{2 \cdot e_2} + \underline{0 \cdot e_3} + \underline{1 \cdot e_4}$$

$$f(e_2) = 2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$f(e_3) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 + 1 \cdot e_4$$

$$f(e_4) = (-1) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 + 1 \cdot e_4$$

③ Schreibe Matrix auf.

Es gilt

$$\text{Mat}(f, \varepsilon, \varepsilon) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(c) zz: B ist eine Basis.

Zunächst zeigen wir, dass B lin. unabh. ist.

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_4 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_3$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_2$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

$\Rightarrow B$ ist linear unabhängig.

Es ist B also eine Basis von $\langle B \rangle$.

Also $\dim \langle B \rangle = 4$.

Korollar 3.59 impliziert $\langle B \rangle = \mathbb{R}^4$.

... und somit implizit $\langle B \rangle = \mathbb{R}^4$.

$\Rightarrow B$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 11 Zeige, dass $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \langle B \rangle$.
Da $\langle B \rangle$ ein Unterraum ist, folgt dann $1e_1 + 1e_2 + 1e_3 + 1e_4 \in \langle B \rangle$. Also $\langle B \rangle = \mathbb{R}^4$.

(1) Ziel: $\text{Mat}(f, \varepsilon, B)$

① Berechne $f(e_i)$, $1 \leq i \leq 4$

$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(e_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

② Schreibe $f(e_i)$ als LK der Vektoren aus B

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_4 - b_3 + 2b_2 - 2b_1$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot b_1$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_4 - b_2$$

$$f(e_4) = b_4 - b_2 - b_1$$

③ Es gilt

$$\begin{matrix} & f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \\ \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

③ Es gilt

$$Mat(f, \varepsilon, B) = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: (sh. Bemerkung 7.3)

Wenn $v = 1_1 \cdot e_1 + 1_2 \cdot e_2 + 1_3 \cdot e_3 + 1_4 \cdot e_4$ und

$$Mat(f, \varepsilon, B) = \begin{pmatrix} 1_1 \\ 1_2 \\ 1_3 \\ 1_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix},$$

Dann $f(v) = \mu_1 \cdot b_1 + \mu_2 \cdot b_2 + \mu_3 \cdot b_3 + \mu_4 \cdot b_4$.

Aufgabe 4

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y - w \\ 2x \\ z + w \\ x + z + w \end{pmatrix}.$$

(a) ges: $\text{Kern}(f)$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \text{Kern}(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 2y - w \\ 2x \\ z + w \\ x + z + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$\text{Kern}(f)$ ist also die Lösungsmenge der LGS

$$\begin{aligned} 2y - w &= 0 \\ 2x &= 0 \\ z + w &= 0 \\ x + z + w &= 0 \end{aligned}$$

Wie üblich erhält man die Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diese Menge ist der Kern von f .
Es gilt

$$\text{Kern}(f) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=: u} \right\rangle.$$

Es ist $\{u\}$ eine Basis von $\text{Kern}(f)$.

Also $\dim \text{Kern}(f) = 1$.

Bsp. 6.19: Sei K Körper, $n, m \in \mathbb{N}$, $A \in M_{n \times m}(K)$.
Sei $\varphi: K^m \rightarrow K^n, x \mapsto A \cdot x$.

Dann wird $\text{Bild}(\varphi)$ von den Spaltenvektoren von A erzeugt.

Nach Aufgabe 3(i) gilt

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Bsp. 6.19 impliziert

$$\text{Bild}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Jedes Erzeugendensystem eines endl. - dim. VL
enthält eine Basis. Die vier Vektoren oben müssen

also eine Basis enthalten.

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\lambda_2 \\ 2\lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \lambda_2 = 0 \\ \rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \rightarrow \lambda_3 = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind l.u.

Nach der Dimensionsformel gilt

$$\begin{aligned} 4 &= \dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker(f) + \dim \operatorname{Bild}(f) \\ &= 1 + \dim \operatorname{Bild}(f) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Bild}(f) = 3$$

und es ist $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\operatorname{Bild}(f)$.