

Aufgabe 2

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y & x+5z \\ x+y & z \end{pmatrix}$$

$$g: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), A \mapsto A^t - A$$

$$h: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a+b \\ b+5c \\ c+d \end{pmatrix}$$

$$\text{Sei } \mathcal{E} := \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: e_3} \right)$$

$$\mathcal{B} := \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=: b_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: b_4} \right)$$

(i) ges: $\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{B})$

① Berechne $f(e_i)$, $1 \leq i \leq 3$.

② Schreibe $f(e_i)$ als LK der $b_1, \dots, b_4$

$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3 + 0 \cdot b_4$$

$$f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3 + 0 \cdot b_4$$

$$f(e_3) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + 5 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 1 \cdot b_4$$

③ Es gilt

$$\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{matrix} & f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(ii) ges: $\text{Mat}(g, \mathcal{B}) = \text{Mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{B})$

① Berechnen der $g(b_i)$, $1 \leq i \leq 4$.

$$\begin{aligned} g(b_1) &= g\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$g(b_2) = g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} \\ \boxed{7} & \boxed{8} & \boxed{9} \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{7} \\ \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{8} \\ \boxed{3} & \boxed{6} & \boxed{9} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g(b_3) = g\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^+ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g(b_4) = g\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^+ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

② Schreibe $g(b_i)$ als LK der b_1, b_2, b_3, b_4 .

$$\text{Es gilt } g(b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 0 \cdot b_4 = g(b_4)$$

$$g(b_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + (-1) \cdot b_2 + 1 \cdot b_3 + 0 \cdot b_4$$

$$g(b_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + (-1) \cdot b_3 + 0 \cdot b_4$$

③ Es gilt

$$Mat(g, \mathcal{B}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} g(b_1) & g(b_2) & g(b_3) & g(b_4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

(iii) z.z. $Mat(h, \mathcal{B}, \mathcal{E})$

① Berechnung $h(b_i)$ für $1 \leq i \leq 4$.

$$\text{Es gilt } h(b_1) = h\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$h(b_2) = h\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Satz 7.4:

• $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ linear

$\varepsilon_1, \varepsilon_m$ Standard-
basen von K^n bzw. K^m

$A := Mat(\varphi, \varepsilon_1, \varepsilon_m)$

$$h(b_3) = h\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h(b_4) = h\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

② Schreibe $h(b_i)$ als LK der e_1, e_2, e_3 .

$$h(b_1) = 2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

$$h(b_2) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

$$h(b_3) = 0 \cdot e_1 + 5 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$$

$$h(b_4) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$$

③ Es gilt

$$\text{Mat}(h, \mathcal{B}_1, \mathcal{E}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} h(b_1) & h(b_2) & h(b_3) & h(b_4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(iV) Findet $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ mit

$$(h \circ g \circ f)(x) = Ax$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \xrightarrow{g} M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \xrightarrow{h} \mathbb{R}^3$$

$h \circ g \circ f$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$.

Nach Satz 7.4 hat

$$A := \text{Mat}(h \circ g \circ f, \mathcal{E})$$

die gewünschte Eigenschaft.

Es gilt

$$\text{Mat}(h \circ g \circ f, \mathcal{E}) =$$

$$\text{Mat}(h, \mathcal{B}_1, \mathcal{E}) \cdot \text{Mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \cdot \text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{B})$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann

$$\varphi(x) = Ax$$

für alle $x \in K^4$.

Bemerkung 7.3

$\varphi: V \rightarrow W$ linear,
 $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$

Basen von V bzw. W ,

$$A := \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$$

Sei $v \in V$ und

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

Sei

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^n \mu_i w_i$$

Satz 7.4:

$\varphi: K^n \rightarrow K^m$ linear

$\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m$ Standard-
basen von K^n bzw. K^m

$$A := \text{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m)$$

Dann

$$\varphi(x) = Ax$$

für alle $x \in K^n$.

Satz 7.6

Seien V, W, X

endl.-dim VR

über K .

Seien $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W, \mathcal{B}_X$

Basen von

V, W, X .

Seien $\varphi: V \rightarrow W$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & 20 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

und $\varphi: W \rightarrow X$

linear. Dann

$$Mat(\varphi \circ \varphi, B_W, B_X)$$

$$= Mat(\varphi, B_W, B_X)$$

$$Mat(\varphi, B_W, B_W)$$

Aufgabe 3

$$W := \{ A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A^t = A \}$$

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow W, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & 5(-x+y-z) \\ 5(-x+y-z) & z \end{pmatrix}$$

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

(i) Beh: B ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Bew: Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad \downarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Die Vektoren } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: b_3} \text{ sind l.u.}$$

$$\Rightarrow \dim \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = 3$$

Es ist also $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ ein 3-dim. UR von $\mathbb{R}^3$.

Wg. $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ folgt $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \mathbb{R}^3$ (s.h.

Korollar 3.56).

$\Rightarrow B = (b_1, b_2, b_3)$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$.

(ii) Findet eine Basis B_W von W .

$$W = \{ A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A^t = A \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, b = c \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Begründung: Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W & \stackrel{\text{Def von } W}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow b = c. \end{aligned}$$

Eine Basis von W hat die Eigenschaft, dass sich jeder Vektor aus W auf eindeutige Weise als LK der

Basisvektoren schreiben lässt.

Für $a, b, d \in \mathbb{R}$ gilt

$$(*) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wähle

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und setze $B_W := (w_1, w_2, w_3)$.

Man kann zeigen, dass B_W eine Basis von W ist, dass (*) existiert, dass B_W ein Erzeugendensystem von W ist und es lässt sich nachprüfen, dass w_1, w_2, w_3 l.u. sind.

(iii) ges: $\text{Mat}(\varphi, B, B_W)$

① Berechne $\varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(b_3)$

② Schreibe $\varphi(b_i)$ als LK der w_1, w_2, w_3

$$\varphi(b_1) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = w_1$$

$$\varphi(b_2) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = w_2$$

$$\varphi(b_3) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = w_3$$

③ Es gilt

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}_W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(iv) Beh.: φ ist Isomorphismus.

Es ist $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}_W)$ invertierbar mit

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}_W)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Satz 7.11 impliziert, dass φ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4: $A^+ \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 7.5 (i)}}}{(A^{-1})^+} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 7.5 (i)}}}{(A^{-1}A)^+} = (I_n)^+ = I_n$

Auch $(A^{-1})^+ A^+ = I_n.$