
Probeklausur zu den Modulen Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte Lineare Algebra und analytische Geometrie (Teil 1)

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Unterschrift: _____

Aufgabe:	1	2	3	4	Σ
Punkte:					

Note:

Hinweise:

- Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, auf das weiße Arbeitspapier.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (außer Schreibzeug und Papier).
- Wenn Sie eine Frage haben, melden Sie sich leise, indem Sie Ihre Hand heben. Wenn Sie zusätzliches Papier brauchen, melden Sie sich mit Papier in der Hand.
- Übungsaufgaben und Resultate aus der Vorlesung dürfen inhaltlich zitiert werden, z. B.

Nach Vorlesung gilt $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

- Es werden alle vier Aufgaben bewertet. Die vierte Aufgabe hat den höchsten Schwierigkeitsgrad.

Aufgabe 1 (17 Punkte)

- (i) Wir schreiben 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 für die Elemente von $\mathbb{Z}/7$ und betrachten das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Z}/7$:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem, indem Sie die Schritte (a), (b) und (c) ausführen. Schreiben Sie in Ihrer gesamten Lösung jedes Element von $\mathbb{Z}/7$ als 0, 1, 2, 3, 4, 5 oder 6.

- (a) (2 Punkt) Bilden Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems.
(b) (7 Punkte) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix durch elementare Zeilenumformungen in reduzierte Stufenform.
(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmenge.
- (ii) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- (iii) (4 Punkte) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(A)$ und berechnen Sie die Matrix α der Kofaktoren von A . Begründen Sie dann, dass A invertierbar ist und nutzen Sie α , um das Inverse A^{-1} zu bestimmen.

Aufgabe 2 (17 Punkte)

- (i) (4 Punkte) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei W eine Teilmenge von V . Definieren Sie, wann W ein *Unterraum* von V genannt wird.

- (ii) Sei

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (a) (4 Punkte) Finden Sie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $W = \langle a, b \rangle$ und zeigen Sie, dass a und b tatsächlich diese Eigenschaft haben. Folgern Sie, dass W ein Unterraum von $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ist.
- (b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass a und b linear unabhängig sind.
- (c) (2 Punkt) Welche Dimension hat W ? Begründen Sie kurz.
- (iii) (4 Punkte) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K , so dass $\dim(V)$ gerade ist. Seien U und W Unterräume von V , sodass

$$V = U + W \text{ und } \dim(U) = \dim(W) = \frac{1}{2}\dim(V).$$

Zeigen Sie, dass $\dim(U \cap W) = 0$ gilt. Benutzen Sie dies, um $U \cap W$ anzugeben.

Aufgabe 3 (17 Punkte)

- (i) Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und sei $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

(a) (2 Punkte) Definieren Sie, wann φ als *Isomorphismus* bezeichnet wird.

(b) (2 Punkte) Definieren Sie, wann φ als *Automorphismus* bezeichnet wird.

Sie dürfen in Ihren Definitionen alle aus der Vorlesung bekannten Begriffe, außer die jeweils zu definierenden Begriffe, als bekannt voraussetzen.

- (ii) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ x + y \\ 3z \end{pmatrix}$$

linear ist.

- (iii) (6 Punkte) Sei φ wie in (ii) und seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Berechnen Sie die Matrix $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B})$.

- (iv) (3 Punkte) Folgern Sie aus (iii), dass die in (ii) definierte Abbildung φ ein Automorphismus ist und geben Sie die Matrix $\text{Mat}(\varphi^{-1}, \mathcal{B})$ an.

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K . Seien $v, w \in V$ mit $v \neq 0_V \neq w$. Zeigen Sie, dass ein Automorphismus φ von V existiert, so dass $\varphi(v) = w$.

Sie können die folgenden aus der Vorlesung bekannten Tatsachen ohne Beweis verwenden:

- (i) Jede linear unabhängige Teilmenge von V kann zu einer Basis von V ergänzt werden.
- (ii) Es reicht aus, eine lineare Abbildung $V \rightarrow V$ auf einer Basis von V zu definieren. Genauer: Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und sind $w_1, \dots, w_n$ Elemente von V , so existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ mit $\varphi(v_i) = w_i$ für $1 \leq i \leq n$.
- (iii) Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und ist $\varphi : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, so gilt $\text{Bild}(\varphi) = \langle \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \rangle$.

Zitieren Sie in Ihrem Beweis die obigen Aussagen gemäß ihrer Nummerierung, z. B.

Nach (iii) gilt ...

