

Lösung der Übungen zur Flächenberechnung durch Integration

Aufgabe 1

Betrachtet wird die rationale Funktion $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstückes, das durch die Geraden $x = 3$ und $x = 5$, sowie den Funktionsgraphen der Funktion $f(x)$ begrenzt wird.

Lösung

Den Flächeninhalt berechnet man nach der Formel $\int_3^5 f(x) dx$

Zur Berechnung des bestimmten Integrals benötigt man eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.

Für die gesuchte Stammfunktion $F(x)$ gilt die Bedingung $F'(x) = f(x)$.

Die Funktion $f(x)$ ist so aufgebaut, dass der Zähler des Quotienten $\frac{2x}{x^2 - 4}$ gerade die Ableitung des Nenners ist.

Es gilt also $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ mit $g(x) = x^2 - 4$.

Die Stammfunktion für einen Ausdruck der Form $\frac{g'(x)}{g(x)}$ ist bekannt, es ist $F(x) = \ln(|g(x)|)$

Dabei muss $g(x) \neq 0$ sein.

Dass dort ein Betragszeichen stehen muss, kann man folgendermaßen einsehen:

(1) die Funktion $\ln(x)$ ist nur für positive reelle Zahlen x definiert.

(2) für $g(x) > 0$ gilt $|g(x)| = g(x)$; es folgt

$$(\ln(|g(x)|))' = (\ln(g(x)))' = \frac{1}{g(x)} g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

für $g(x) < 0$ gilt $|g(x)| = -g(x)$; es folgt

$$(\ln(|g(x)|))' = (\ln(-g(x)))' = \frac{1}{-g(x)} (-g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

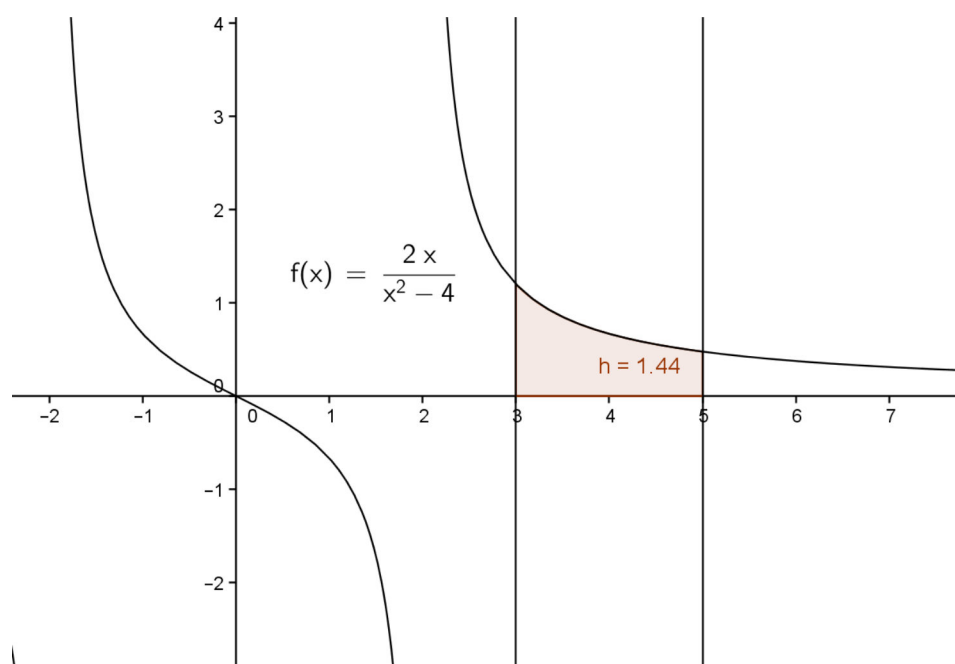
Speziell gilt $(\ln(|x^2 - 4|))' = \frac{2x}{x^2 - 4}$

Damit gilt für das bestimmte Integral $\int_3^5 f(x)dx$:

$$\int_3^5 f(x)dx = [F(x)]_3^5 = F(5) - F(3) = \ln(|g(5)|) - \ln(|g(3)|) = \ln(21) - \ln(5) = 1,44$$

Ergebnis: das gesuchte Flächenstück hat den Inhalt 1,44 FE
(Flächeneinheiten)

Die Graphik zur Aufgabenstellung



Aufgabe 2

Betrachtet wird das Polynom $f(x) = x^3 + 2x^2$

Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes, das durch die Geraden $x = -3$ und $x = 1$, sowie den Graphen der Funktion gebildet wird.

Bei der Integration von -3 bis +1 über die Funktion $f(x)$ integriert man über Nullstellen der Funktion, d.h. die Ergebnisse der Teil-Integrationen zwischen den Nullstellen können positiv oder negativ ausfallen. Der gesuchte Flächeninhalt ist positiv zu berechnen.

(1) Bestimmung der Nullstellen im Integrationsweg der Funktion:

$x^3 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x + 2) = 0$; Nullstellen sind $x_1 = 0$; $x_2 = -2$. $x_1 = 0$ ist eine doppelte Nullstelle.

(2) Bestimmung einer Stammfunktion von $f(x)$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 \text{ hat als Stammfunktion } F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3$$

(3) Die Integrationswege:

$$\int_{-3}^{-2} f(x)dx = [F(x)]_{-3}^{-2} = F(-2) - F(-3) = -3,58$$

$$\int_{-2}^0 f(x)dx = [F(x)]_{-2}^0 = F(0) - F(-2) = 1,33$$

$$\int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = 0,92$$

Die Summe der drei Einzelintegrale ergibt den Wert -1,33.

Da man für den gesamten Flächeninhalt die einzelnen Teile positiv rechnen muss, ergibt sich 5,83 als der gesuchte Flächeninhalt.

Ergebnis: der gesuchte Flächeninhalt ist 5,83 FE.

Man erhält dieses Ergebnis, wenn man über den Absolutbetrag der Funktion integriert, also

$$\int_{-3}^1 |f(x)|dx = 5,83$$

Die Graphik zur Aufgabenstellung

