

Übungen zur unbestimmten Integration

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

Aufgabe 1

(a) $\int \cos(x) dx$

(b) $\int \cos(2x) dx$

(c) $\int \cos(-3x) dx$

(d) $\int \cos(\frac{1}{2} x) dx$

(e) $\int \sin(x) dx$

(f) $\int \sin(2x + 3) dx$

(g) $\int 2 \sin(2x + 5) + \cos(3x) dx$

(h) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Lösungen

(zu a)

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C;$$

$$\text{Probe: } (\sin(x) + C)' = \cos(x)$$

(zu b)

$$\int \cos(2x) dx = \frac{\sin(2x)}{2} + C$$

$$\text{Probe: } \left(\frac{\sin(2x)}{2} + C \right)' = \cos(2x)$$

(zu c)

$$\int \cos(-3x) dx = -\frac{1}{3} \sin(-3x) + C$$

$$\text{Probe: } \left(-\frac{1}{3} \sin(-3x) + C \right)' = \cos(-3x)$$

Bemerkung: $\cos(-3x) = \cos(3x)$; $-\sin(-3x) = \sin(3x)$

Computeralgebra-Systeme (CAS) rechnen direkt:

$$\int \cos(-3x) dx = \frac{1}{3} \sin(3x) + C \quad (\text{Maple 14, GeoGebra})$$

(zu d)

$$\int \cos\left(\frac{1}{2}x\right) dx = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + C$$

(zu e)

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

(zu f)

$$\int \sin(2x + 3) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x + 3) + C$$

(zu g)

$$\int 2 \sin(2x + 5) + \cos(3x) dx = -\cos(2x + 5) + \frac{1}{3} \sin(3x) + C$$

(zu h)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + C$$

Bemerkung: C ist eine beliebige reelle Integrationskonstante.

Aufgabe 2

(a) $\int e^x dx$

(b) $\int e^{2x} dx$

(c) $\int e^{2x+3} dx$

Lösungen

(zu a)

$$\int e^x dx = e^x + C$$

(zu b)

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

(zu c)

$$\int e^{2x+3} dx = \frac{1}{2} e^{2x+3} + C$$

Aufgabe 3

(a) $\int 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 dx$

(b) $\int \frac{1}{x} dx$

(c) $\int \frac{1}{x^2} dx$

(d) $\int \frac{x-3}{x^2-9} dx$

Lösungen

(zu a)

$$\int 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 dx = \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{4} x^4 + \frac{4}{5} x^5 + C$$

(zu b)

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

Probe:

$$(1) x > 0 \Rightarrow \ln(|x|) = \ln(x); (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(2) x < 0 \Rightarrow \ln(|x|) = \ln(-x); (\ln(-x))' = \frac{1}{x}$$

(zu c)

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C; -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

(zu d)

$$\int \frac{x-3}{x^2-9} dx = \int \frac{x-3}{(x+3)(x-3)} dx = \int \frac{1}{x+3} dx = \ln(|x+3|) + C$$