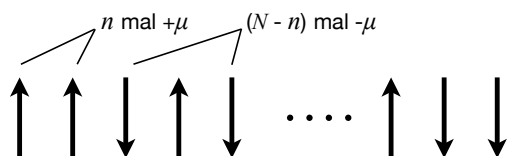


1. Bei einem Wurfspiel mit Pfeilen trifft man mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.3 ins Schwarze. Man wirft dreimal hintereinander und notiert die Ergebnisse dieses Zufallsexperiments in der Form TFT (T = Treffer, F = Fehlwurf).
 - (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Zufallsexperiment.
 - (b) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten trifft man jeweils genau zweimal und mindestens einmal?
 - (c) Geben Sie die mittlere Trefferzahl $\bar{n}$ an und bestimmen Sie die Schwankung Δn dieser Verteilung.
2. Ein einfaches Modell eines Magneten besteht aus einem System von N unabhängigen elementaren magnetischen Momenten (Spins), die jeweils entweder den Wert μ (Zustand $\uparrow$) oder den Wert $-\mu$ (Zustand $\downarrow$) annehmen können (vgl. Abbildung). Es seien p und q die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten



für die Zustände $\uparrow$ bzw. $\downarrow$ (also $p + q = 1$).

- (a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $w_N(n)$ dafür, genau n Spins im Zustand $\uparrow$ zu finden, einer Binomialverteilung

$$w_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

genügt. Zeigen Sie ferner, dass die zugehörige Verteilung normiert ist, d.h. $\sum_{n=0}^N w_N(n) = 1$ gilt.

- (b) Berechnen Sie die mittlere Zahl $\bar{n} = \sum_{n=0}^N n w_N(n)$ der $\uparrow$ Spins. Wie groß ist der Meßwert für das magnetische Moment $\bar{M}$ des *gesamten* Magneten? Was ergibt sich im Spezialfall $p = q$? Interpretieren Sie das Ergebnis.
 - (c) Zeigen Sie, dass die Schwankung $\Delta n = \sqrt{n^2 - \bar{n}^2}$ dieser Verteilung mit $\sqrt{N}$ wächst und dass für die relative Schwankung $\Delta n / \bar{n} \propto 1/\sqrt{N}$ gilt. Hier ist $\bar{n}^2$ durch $\bar{n}^2 = \sum_{n=0}^N n^2 w_N(n)$ definiert.
3. Betrachten Sie den Magneten aus Aufgabe 2 im Grenzfall sehr großer N und für den Fall, dass nahezu alle Spins im Zustand $\downarrow$ vorliegen (seltene Ereignisse für Zustand $\uparrow$). Dies entspricht dem Grenzfall $p \ll 1$ und $n \ll N$.

- (a) Zeigen Sie, dass dann die Binomialverteilung $w_N(n)$ aus Aufgabe 2 in eine Poisson-Verteilung

$$W_{\bar{n}}(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

übergeht (mit $\bar{n} = Np$).

Hinweise: Bilden Sie zunächst den Logarithmus der Binomial-Verteilungsfunktion $w_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$ und nutzen Sie aus, dass für große N die Näherungsformel $\ln N! \approx N \ln N - N$ (Stirling'sche Formel) gilt. Führen Sie dann eine Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung in n/N und p durch.

- (b) Überprüfen Sie die Normierung und zeigen Sie, dass der Parameter $\bar{n}$ mit dem Mittelwert von n übereinstimmt. Berechnen Sie die Schwankung von n .

4. Die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung einer Komponente v der Geschwindigkeit eines Gasatoms sei durch eine Gauß-Verteilung gegeben,

$$\rho(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit} \quad -\infty < v < +\infty.$$

- (a) Berechnen Sie zunächst die allgemeinen Integrale $I_0(\alpha) = \int_0^\infty dx e^{-\alpha x^2}$ sowie $I_2(\alpha) = \int_0^\infty dx x^2 e^{-\alpha x^2}$. *Hinweise:* Betrachten Sie $I_0^2(\alpha)$ und führen Sie die Integration in zwei Dimensionen in Polarkoordinaten aus. Führen Sie dann $I_2(\alpha)$ durch eine geeignete Ableitung auf $I_0(\alpha)$ zurück.
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe der Integrale aus (a), dass $\rho(v)$ normiert ist und bestimmen Sie die Schwankung Δv .