

1. Ziel dieser Aufgabe ist es, für große Zahlen Z eine Formel für die Näherung der zugehörigen Fakultät $Z!$ zu finden.

- (a) Zeigen Sie zunächst, dass $\ln Z! \approx Z \ln Z - Z$ als eine grobe Näherung betrachtet werden kann. Bilden Sie dazu vom exakten Ausdruck für $Z!$ den Logarithmus und ersetzen die entstehende Summe durch ein Integral.
- (b) Nun soll eine bessere Näherung für $Z!$ hergeleitet werden. Zeigen Sie zunächst unter Benutzung der Z -fachen Ableitung nach $(-\alpha)$ des Integrals $\int_0^\infty dx e^{-\alpha x}$, dass die folgende *exakte* Darstellung für $Z!$ gilt,

$$Z! = \int_0^\infty dx e^{-x} x^Z = \int_0^\infty dx e^{-x+Z \ln x}.$$

- (c) Führen Sie eine Kurvendiskussion für den Integranden $f(x) = e^{-x} x^Z$ durch und zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ bei großen Z ein sehr scharfes Maximum bei $x = Z$ von der Breite $\delta \approx 2\sqrt{Z}$ hat und daher der Exponent im Integrand in der Umgebung des Maximums entwickelt werden kann.
- (d) Führen Sie eine Taylor-Entwicklung der Funktion $g(x) = -x + Z \ln x$, welche *im Exponenten* steht, bis zum quadratischen Term durch und zeigen Sie, dass unter Ausdehnung der unteren Integrationsgrenze bis $-\infty$ im obigen Integral der folgende Näherungsausdruck für $Z!$ gilt,

$$Z! \approx \left(\frac{Z}{e}\right)^Z \sqrt{2\pi Z} \quad (\text{Stirling'sche Formel}).$$

Überzeugen Sie sich, dass die Näherung selbst für kleine Z brauchbare Ergebnisse liefert.

2. Bei der thermischen Emission von Elektronen verlassen Elektronen die Oberfläche eines Metalls aufgrund ihrer thermischen Energie. Wir nehmen an, dass die Emission der einzelnen Elektronen durch unabhängige Ereignisse beschrieben werden kann. Die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines einzelnen Elektrons innerhalb eines kleinen Zeitintervalls dt sei gleich λdt , wobei $\lambda = \text{const.}$.

- (a) Es sei $P_n(t)$ die Wahrscheinlichkeit für die Emission von n Elektronen in der Zeit t . Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit $P_n(t + dt)$ durch Betrachtung des Ereignisses 'ein Elektron verlässt im Zeitintervall dt die Oberfläche' durch die Wahrscheinlichkeiten $P_{n-1}(t)$ und $P_n(t)$ aus. Zeigen Sie, dass man daraus das folgende System von Differentialgleichungen finden kann,

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda [P_{n-1}(t) - P_n(t)] \quad \text{für } n > 0, \text{ sowie } \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t).$$

Wie lautet die Anfangsbedingung $P_n(t = 0)$?

- (b) Lösen Sie das so entstandene Differentialgleichungssystem für $P_n(t)$ beginnend mit $n = 0$ und zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $P_n(t)$ der Poisson-Verteilung $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ genügt.

3. Zeigen Sie mit Hilfe der Stirling-Formel aus Aufgabe 1, dass die Poisson-Verteilung

$$W_{\bar{n}}(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

für $n \gg 1$ und $\bar{n} \gg 1$ in einem Bereich von n dicht um den Mittelwert $\bar{n}$, d.h. für $(n - \bar{n})/\bar{n} \ll 1$, in eine Gauß-Verteilung,

$$w(n) = \frac{1}{\Delta n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{n - \bar{n}}{\Delta n} \right)^2}$$

(mit $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$) übergeht.

Hinweise: Bilden Sie wieder den Logarithmus von $W_{\bar{n}}(n)$ und ersetzen dann $n!$ mit $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. Ersetzen Sie im Anschluß n mit $n = \bar{n}(1 + \frac{\nu}{\bar{n}})$ und führen dann eine Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung von $\nu/\bar{n} \ll 1$ durch. Nutzen Sie ferner aus, dass ν selbst groß gegen 1 ist.