

1. Betrachtet werden zwei Spinsysteme mit jeweils N_1 und N_2 Spins, die im *thermischen Kontakt* stehen sollen. (*Von thermischem Kontakt spricht man, wenn Energie frei vom einen zum anderen System übertragen werden kann, wobei aber die Gesamtenergie $E = E_1 + E_2$ konstant bleibt. Der Energieaustausch kann durch eine schwache magnetische Kopplung zwischen den Spins in der Nähe der Trennwand beider Systeme erfolgen. Bei großen Systemen ist der Beitrag dieser Kopplung zur Gesamtenergie vernachlässigbar.*) Es sei $n = n_1 + n_2$ die Gesamtzahl der Spins im Zustand $\uparrow$. Die Gesamtenergie sei allein durch n festgelegt. Nach dem Koppeln der beiden Systeme können sich die $\uparrow$ -Spins beliebig in beiden Systemen verteilen, wobei n konstant bleibt.
 - (a) Finden Sie für das Gesamtsystem $N = N_1 + N_2$ die Anzahl $g(N, n)$ aller möglichen Konfigurationen von $\uparrow$ - und $\downarrow$ -Spins (Mikrozustände), die zu $n = n_1 + n_2$ Spins im Zustand $\uparrow$ gehören.
 - (b) Zeigen Sie, dass der größte Summand mit $n_1 = \tilde{n}_1$ in der Summe für $g(N, n)$ bestimmt ist durch die Bedingung

$$\left. \frac{d \ln g(N_1, n_1)}{dn_1} \right|_{n_1 = \tilde{n}_1} = \left. \frac{d \ln g(N_2, n_2)}{dn_2} \right|_{n_2 = \tilde{n}_2 = n - \tilde{n}_1} \quad (1)$$

mit

$$g(N_i, n_i) = \binom{N_i}{n_i}.$$

Das bestimmt die wahrscheinlichste Konfiguration des Gesamtsystems bei gegebenen N_1, N_2 .

- (c) Betrachten Sie nun den Grenzfall sehr großer N_1, N_2 , indem Sie die Näherung verwenden, dass in diesem Grenzfall die Binomial-Verteilung $w_{N_i}(n_i)$ in eine Gauß-Verteilung

$$w_{N_i}(n_i) \approx \frac{1}{\Delta n_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{n_i - \bar{n}_i}{\Delta n_i} \right)^2} \quad \text{mit} \quad \bar{n}_i = p N_i; \quad \Delta n_i = \sqrt{N_i p q}$$

übergeht. Leiten Sie unter Annahme von gleicher Wahrscheinlichkeit $p = q = 1/2$ für $\uparrow$ - und $\downarrow$ -Spins eine Näherung für $g(N_i, n_i)$ her und zeigen Sie damit, dass die Bedingung (1) für $N_1, N_2 \gg 1$ übergeht in

$$\frac{\tilde{n}_1}{N_1} = \frac{\tilde{n}_2}{N_2}.$$

Diskutieren Sie die physikalische Bedeutung. Wie groß ist der Mittelwert $\bar{n}$ der $\uparrow$ -Spins?

2. Das Volumen eines Kastens wird durch eine Wand im Verhältnis 3 : 1 geteilt. Im größeren Teilvolumen befinden sich 1000 Neonmoleküle, im kleineren 100 Heliummoleküle. Die Zwischenwand wird entfernt und man wartet bis wieder Gleichgewicht eintritt.
 - (a) Finden Sie für jede Sorte der Moleküle jeweils Formeln $w_{\text{Ne}}(n)$ und $w_{\text{He}}(n)$ für die Wahrscheinlichkeit, dass im größeren Teilvolumen genau n Moleküle der jeweiligen Sorte zu finden sind.
 - (b) Geben Sie die mittlere Anzahl der Moleküle jeder Sorte an, die sich in jedem Teilvolumen befindet.
 - (c) Berechnen Sie mit Hilfe der Formeln aus (a) die Wahrscheinlichkeit, dass wieder die Ausgangsverteilung (also 1000 Neonmoleküle im größeren und 100 Heliummoleküle im kleineren Teilvolumen) vorgefunden wird.
3. Gegeben ist ein Teilchen, das sich nur entlang der x -Achse bewegen kann. Es soll sich zufällig hin und her bewegen, d.h. sein Aufenthaltsort kann nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit angegeben werden. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x)$, das Teilchen am Ort x zu finden, sei gegeben. Als Maß für die Unsicherheit einer Verteilung $\rho(x)$ kann das Integral $I = - \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \ln \rho(x) dx$ betrachtet werden. Berechnen Sie I für die folgenden zwei Fälle:
 - (a) Das Teilchen soll sich zunächst *nur* auf einer Strecke der Länge σ bewegen können. Formulieren Sie die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(x)$ und berechnen Sie I . Wie ändert sich I , wenn das System vergrößert wird und sich das Teilchen zusätzlich (unabhängig von der ersten Strecke) noch auf einer anderen Strecke mit der Länge σ' bewegen kann?
 - (b) Nun werde die Wahrscheinlichkeitsdichte aus (a) durch eine Gauß-Verteilung

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

ersetzt. Berechnen Sie I für diesen Fall und vergleichen Sie das Ergebnis mit (a).