

1. Gegeben sei ein statistisches System mit Ereignissen $E_1, E_2, \dots, E_N$ und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \dots, p_N$. Für Gleichverteilung und $p_n = 1/2^k$, wobei k durch irgendeine nichtnegative ganze Zahl gegeben ist, kann die *mittlere Information*

$$H = - \sum_{n=1}^N p_n \text{ld}(p_n) \quad (\text{wobei } \text{ld}(2^x) = x)$$

als die minimale Anzahl von Alternativfragen (deren Antworten *ja* oder *nein* sind) interpretiert werden, die im Mittel erforderlich sind, um die Versuchsergebnisse festzulegen (Zusammenhang mit der Entropie des Systems über einen konstanten Faktor). Für die folgenden Systeme

- (a) Eine Münze wird geworfen und fällt zur Erde (E_1);
- (b) Eine Münze fällt mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf *Zahl* oder *Wappen* (E_1, E_2);
- (c) Ein Teilchen hält sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf einem der Felder eines Schachbretts auf

überlege man sich günstige Schemata solcher Alternativfragen, berechne die mittlere Zahl von Fragen und vergleiche mit der mittleren Information.

2. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens in x -Richtung soll durch eine Gauß-Verteilung

$$\rho_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}}$$

beschrieben werden. Hier bezeichnet $\langle x \rangle$ die mittlere Position des Teilchens und σ seine Unschärfe. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass die zugehörige Entropie

$$S_G = -k_B \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_G(x) \ln \rho_G(x)$$

des Teilchens *nicht* von seiner mittleren Position abhängig ist und daher nur durch seine Unschärfe bestimmt ist. Hier bezeichnet k_B die Boltzmann-Konstante.

3. Finden Sie diejenige (normierte) Verteilung $\rho(x)$ ($-\infty < x < \infty$), die die Entropie S bei gegebenem Mittelwert $\langle x \rangle = 0$ und gegebener mittlerer quadratischer Schwankung $\Delta x = \sigma$ maximiert. Dies entspricht einer funktionalen Bestimmung des Extremwerts von S mit den Nebenbedingungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) = 1 \quad \text{Normierung,} \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x \rho(x) = 0 \quad \text{Mittelwert,} \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \rho(x) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx x \rho(x) \right)^2 = \sigma^2 \quad \text{Schwankung.} \tag{3}$$

Mit dem mathematischen Verfahren zur Lösung einer solchen funktionalen Extremwertaufgabe kann man zeigen, dass die gesuchte Funktion $\rho = \rho(x)$ folgende Gleichung erfüllen muss,

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho \ln \rho + \alpha \rho + \gamma x \rho + \beta x^2 \rho \} = 0, \quad (4)$$

wobei α, β, γ noch unbestimmte Konstanten sind (Lagrange-Parameter), welche durch die obigen Nebenbedingungen eingehen.

- (a) Finden Sie aus Gleichung (4) die Funktion $\rho = \rho(x)$, wobei in $\rho(x)$ die Konstanten α, β, γ als Parameter auftreten.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Funktion $\rho(x)$ die drei noch unbekannten Lagrange-Parameter α, β, γ , indem Sie die drei zu erfüllenden Nebenbedingungen (1-3) explizit berechnen und die entstehenden Gleichungen jeweils nach α, β und γ auflösen.