

1. Gegeben ist eine Dichtematrix $\hat{\rho} = \sum_{\alpha} P_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}|$, wobei die quantenmechanischen Zustandsvektoren $|\psi_{\alpha}\rangle$ in einer orthogonalen Basis $|i\rangle$ dargestellt sind, d.h. es gilt $|\psi_{\alpha}\rangle = \sum_i c_{\alpha i} |i\rangle$ mit den im allgemeinen komplexen Komponenten $c_{\alpha i}$, die einer Normierung $\sum_i |c_{\alpha i}|^2 = 1$ unterliegen. Für das orthogonale System von Basisvektoren soll $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ gelten.

- (a) Zeigen Sie, dass $\text{Sp}(\hat{\rho}) = 1$ gilt.
 (b) Zeigen Sie, dass $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ nur dann gilt, wenn ein reiner Zustand vorliegt, d.h. wenn alle P_{α} bis auf genau ein Element verschwinden, und das nichtverschwindende Element gleich Eins ist.
 (c) Die orthogonale Basis soll nun aus genau drei Basisvektoren $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ bestehen. Dargestellt in dieser Basis seien folgende Zustandsvektoren gegeben: $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)$, $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$, $|\psi_3\rangle = |3\rangle$. Berechnen Sie explizit jeweils die Dichtematrix für die *reinen* Zustände,

$$\hat{\rho}_1 = |\psi_1\rangle \langle \psi_1| \quad \hat{\rho}_2 = |\psi_2\rangle \langle \psi_2| \quad \hat{\rho}_3 = |\psi_3\rangle \langle \psi_3|$$

und die *gemischten* Zustände,

$$\hat{\rho}_4 = \frac{1}{2}(|\psi_1\rangle \langle \psi_1| + |\psi_2\rangle \langle \psi_2|) \quad \hat{\rho}_5 = \frac{1}{3}(|\psi_1\rangle \langle \psi_1| + |\psi_2\rangle \langle \psi_2| + |\psi_3\rangle \langle \psi_3|).$$

2. Der Zustandsraum eines Spin-1/2-Teilchens werde durch die zwei orthogonalen und normierten Zustandsvektoren $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ aufgespannt. Betrachtet werde ein System aus *zwei* solcher Spin-1/2-Teilchen. Jeder quantenmechanische Zustand $|\psi\rangle$ eines solchen Systems kann durch eine Linearkombination aus vier orthogonalen Basisvektoren in der Form

$$|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\uparrow\rangle + \gamma |\uparrow\downarrow\rangle + \delta |\downarrow\downarrow\rangle,$$

dargestellt werden, wobei $|\sigma_1\sigma_2\rangle = |\sigma_1\rangle_1 |\sigma_2\rangle_2$ Produktzustände aus den Basisvektoren der einzelnen Teilchen sind. Es gilt für ein beliebiges Skalarprodukt $\langle \sigma_1\sigma_2 | \sigma'_1\sigma'_2 \rangle = \delta_{\sigma_1,\sigma'_1} \delta_{\sigma_2,\sigma'_2}$ mit $\sigma_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$. In der gesamten Aufgabe soll der *spezielle* Zustand $|\psi_s\rangle$ parallel ausgerichteteter Spins, welcher durch $\alpha = \delta = 1/\sqrt{2}$ sowie $\beta = \gamma = 0$ festgelegt ist, betrachtet werden.

- (a) Diskutieren Sie die allgemeine Matrixstruktur von Zuständen und Observablen des Gesamtsystems. Vergewissern Sie sich, dass Zustände als vierdimensionale Spaltenvektoren und Observablen als 4×4 - Matrizen geschrieben werden können. Überzeugen Sie sich, dass die orthogonale Basis in der Form

$$|\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\uparrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann. Wie lautet der spezielle Zustand $|\psi_s\rangle$ geschrieben in dieser Form als vierdimensionaler Spaltenvektor?

- (b) Gegeben seien die zwei Observablen $\hat{\sigma}_1$ und $\hat{\sigma}_1^2$, welche den Spin '1' bzw. dessen Quadrat beschreiben. Es gilt $\hat{\sigma}_1 |\uparrow\rangle_1 = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle_1$ sowie $\hat{\sigma}_1 |\downarrow\rangle_1 = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle_1$. Man beachte, dass diese Observablen sich *nur* auf Spin '1' beziehen und daher auch nur in dessen Zustandsraum wirken. Vergewissern Sie sich, dass die Matrixdarstellungen dieser Observablen *in der Basis des Gesamtsystems* folgendermaßen lauten,

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_1^2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie daraus die quantenmechanischen Erwartungswerte $\langle\psi_s|\hat{\sigma}_1|\psi_s\rangle$ und $\langle\psi_s|\hat{\sigma}_1^2|\psi_s\rangle$.

- (c) Finden Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}$ für den Zustand $|\psi_s\rangle$. *Hinweis:* Betrachten Sie den Zustand $|\psi_s\rangle$ in der Form $|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$. Bilden Sie dann das Produkt $\hat{\rho} = |\psi_s\rangle\langle\psi_s|$ und lesen die Matrixelemente aus der entstehenden Summe ab.
- (d) Zeigen Sie, dass $\hat{\rho}$ einen *reinen* Zustand beschreibt, d.h. $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ gilt.
- (e) Berechnen Sie die quantenstatistischen Erwartungswerte $\langle\hat{\sigma}_1\rangle = \text{Sp}(\hat{\sigma}_1\hat{\rho})$ und $\langle\hat{\sigma}_1^2\rangle = \text{Sp}(\hat{\sigma}_1^2\hat{\rho})$.
- (f) Zeigen Sie, dass die *reduzierte* Dichtematrix $\hat{\hat{\rho}} = \text{Sp}_2(\hat{\rho}) = \langle\uparrow|\hat{\rho}|\uparrow\rangle_2 + \langle\downarrow|\hat{\rho}|\downarrow\rangle_2$ die Form

$$\hat{\hat{\rho}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

besitzt, indem Sie von der Dichtematrix des Gesamtsystems *nur* die Spur über die Zustände des zweiten Spins bilden. Vergewissern Sie sich, dass $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\hat{\rho}}$ ist, die reduzierte Dichtematrix also nicht mehr rein ist.

- (g) Zeigen Sie, dass die Erwartungswerte der hier betrachteten Observablen gebildet mit der reduzierten Dichtematrix, d.h. $\text{Sp}_1(\hat{\sigma}_1\hat{\hat{\rho}})$ und $\text{Sp}_1(\hat{\sigma}_1^2\hat{\hat{\rho}})$, genau mit den jeweiligen Ergebnissen aus (e) übereinstimmen.

3. In einer aus zwei Zuständen 1 und 2 bestehenden Basis ist die Dichtematrix durch

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} \end{pmatrix}.$$

gegeben. $\hat{\rho}$ beschreibe einen *reinen* Zustand.

- (a) Welche Bedingungen müssen die Matrixelemente von $\hat{\rho}$ dann erfüllen? Diskutieren Sie die Anzahl der noch freien Parameter.
- (b) Wie sieht $\hat{\rho}$ dann in Diagonaldarstellung aus?