

1. Die Hamilton-Funktion H eines physikalischen Systems sei aufgebaut aus $2D$ quadratischen Termen,

$$H = \sum_{i=1}^D \frac{a_i}{2} p_i^2 + \sum_{i=1}^D \frac{b_i}{2} r_i^2,$$

wobei p_i Impuls- und r_i Ortskoordinaten seien ($a_i, b_i = \text{const.}$). Zeigen Sie, dass für ein kanonisches Ensemble *jede* dieser Variablen einen Beitrag $\frac{1}{2}k_B T$ zur mittleren Energie liefert, d.h. dass gilt

$$\langle H \rangle := \frac{\int d^D r \int d^D p H e^{-\beta H}}{\int d^D r \int d^D p e^{-\beta H}} = (2D) \frac{1}{2} k_B T$$

(Gleichverteilungssatz im kanonischen Ensemble). Was ergibt sich für ein ideales Gas aus N Teilchen, bei dem die Hamilton-Funktion nur aus Komponenten der kinetischen Energie besteht?

Hinweise: Betrachten Sie zunächst den Erwartungswert eines Terms der Hamilton-Funktion, z.B. $\langle \frac{a_i}{2} p_i^2 \rangle$, und zeigen dann, dass die gleiche Betrachtung auch für alle anderen Terme gilt. Verwenden Sie die in der Aufgabe 4(a) des 2. Übungsblattes bereits gelösten Integrale.

2. Ein Fluid aus N klassischen Teilchen in einem Potential wird durch die Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^D \frac{p_i^2}{2m} + E_{\text{pot}}(r_1, \dots, r_D) = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

beschrieben. Hier sind $p_1, \dots, p_D$ die Impulskoordinaten und $r_1, \dots, r_D$ die Ortskoordinaten ($D = 3N$) der Teilchen. Die zugehörige Verteilung $f(r_1, \dots, r_D, p_1, \dots, p_D)$ soll dem kanonischen Ensemble unterliegen.

- (a) Begründen Sie, dass die Verteilung $f(r_1, \dots, r_D, p_1, \dots, p_D)$ des Gesamtsystems in voneinander unabhängige Impuls- und Ortsverteilungen gemäß

$$f(r_1, \dots, r_D, p_1, \dots, p_D) = f_r(r_1, \dots, r_D) \cdot f_p(p_1, \dots, p_D)$$

mit $f_p \propto e^{-\beta E_{\text{kin}}}$, $f_r \propto e^{-\beta E_{\text{pot}}}$ separiert werden kann.

- (b) Wir interessieren uns nun für die Impulsverteilung $f_p(p_1, \dots, p_D)$. Begründen Sie, dass die Impulsverteilung weiter in die Einzelverteilungen der N Teilchen gemäß

$$f_p(p_1, \dots, p_D) = w(\mathbf{p}_1) \cdot w(\mathbf{p}_2) \cdot \dots \cdot w(\mathbf{p}_N) \quad \text{mit} \quad w(\mathbf{p}) = C e^{-\mathbf{p}^2 / 2mk_B T}$$

separiert werden kann.

- (c) Geben Sie mit Hilfe des Ergebnisses für $w(\mathbf{p})$ aus (b) und der bekannten Relation zwischen Impuls und Geschwindigkeit die Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{w}(\mathbf{v})$ an, mit der ein Gasteilchen mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ angetroffen wird. Berechnen Sie dazu explizit die Konstante C aus der Bedingung für die Normierung dieser Verteilung, $1 = \int d^3v \tilde{w}(\mathbf{v})$.
- (d) Zeigen Sie mit Hilfe der Geschwindigkeitsverteilung $\tilde{w}(\mathbf{v})$, dass die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Betrag $v = |\mathbf{v}|$ der Geschwindigkeit eines einzelnen Gasteilchens im Intervall $[v \dots v + dv]$ zu finden, durch $\tilde{w}(v)dv$ mit

$$\tilde{w}(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (\text{Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung})$$

gegeben ist. Diskutieren Sie den Verlauf dieser Verteilung.

Hinweis: Man erhält $\tilde{w}(v)$ aus $\tilde{w}(\mathbf{v})$, indem man über die Winkel und das Geschwindigkeitsintervall integriert und ausnutzt, dass $dv \ll v$ gilt. Dann muss im Grenzfall $dv \rightarrow 0$ nur der Beitrag in erster Ordnung in dv mitgenommen werden.

3. Ein klassisches System aus N wechselwirkungsfreien Teilchen sei durch die Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right]$$

beschrieben und befinde sich in einem Wärmebad.

- (a) Geben Sie die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ für *ein* Teilchen an (Boltzmann-Verteilung), d.h. die Wahrscheinlichkeitsdichte, ein Teilchen am Ort $\mathbf{r}$ mit dem Impuls $\mathbf{p}$ zu finden. (Normierungsfaktor muss nicht bestimmt werden.)
- (b) Wie lautet die Teilchendichte $n(\mathbf{r}) = Nf(\mathbf{r})$, wenn sich N Teilchen in einem zylindrischen Gefäß (Grundfläche A , Höhe h) im Schwerfeld der Erde befinden (*barometrische Höhenformel*)? Diskutieren Sie die Grenzfälle $mgh \ll k_B T$ und $mgh \gg k_B T$.