Kapitel 11

Eichtheorien

Dieses Kapitel führt in die „Eichtheorien" ein, von denen man heute glaubt, daß sie allen Wechselwirkungen von Elementarteilchen zugrundeliegen. Ich beginne mit der Lagrangeschen Formulierung der klassischen Mechanik und gehe anschließend weiter zu der Lagrangeschen Feldtheorie, dem Prinzip der lokalen Eichinvarianz, der Vorstellung der spontanen Symmetriebrechung und dem Higgs-Mechanismus (der die Masse der W's und des Z erklärt). Dieses Material ist ziemlich abstrakt (im Gegensatz zu früheren Kapiteln); es betrifft die fundamentalen Quantenfeldtheorien, aus denen die Feynman-Regeln hergeleitet sind. Es wird Ihnen nicht helfen, irgendwelche Wirkungsquerschnitte oder Lebensdauern zu berechnen. Auf der anderen Seite bilden die hier diskutierten Vorstellungen das Fundament, auf dem praktisch alle modernen Theorien gründen. Um dieses Kapitel zu verstehen, wird es für Sie hilfreich sein, die Lagrangesche Mechanik zu kennen, aber wesentlich wichtiger sind die relativistische Schreibweise in Kapitel 3, die Kostprobe an Gruppentheorie in Kapitel 4, der Feynman-Kalkül aus Kapitel 6 und die Dirac-Gleichung aus Kapitel 7.

11.1 Die Lagrangesche Formulierung der klassischen Teilchenmechanik

Gemäß dem zweiten Bewegungsgesetz Newtons erfährt ein Teilchen der Masse m, auf das eine Kraft $\boldsymbol{F}$ wirkt, eine Beschleunigung $\boldsymbol{a}$, die durch

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{11.1}$$

gegeben ist. Wenn die Kraft *konservativ* ist, so kann sie als der Gradient einer skalaren potentiellen Energiefunktion U ausgedrückt werden:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U \tag{11.2}$$

und das Newtonsche Gesetz lautet dann

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla U \tag{11.3}$$

worin $\boldsymbol{v}$ die Geschwindigkeit ist.[1]
Eine alternative Formulierung der klassischen Mechanik beginnt mit der „Lagrange-Funktion“

$$L = T - U \tag{11.4}$$

worin T die kinetische Energie des Teilchens ist:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \tag{11.5}$$

Die Lagrange-Funktion ist eine Funktion der Koordinaten q_i (etwa $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$) und ihrer zeitlichen Ableitungen $\dot{q}_i$ ($\dot{q}_1 = v_x, \dot{q}_2 = v_y, \dot{q}_3 = v_z$). In der Lagrangeschen Formulierung ist die Euler-Lagrange-Gleichung das fundamentale Bewegungsgesetz:[2]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{11.6}$$

In kartesischen Koordinaten haben wir somit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial v_x} = m v_x \tag{11.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{11.8}$$

und die Euler-Lagrange-Gleichung liefert (für $i = 1$) die x-Komponente des Newtonschen Gesetzes in der Form von Gleichung (11.3). Die Lagrangesche Formulierung ist folglich der Newtonschen äquivalent (zumindest für konservative Systeme), aber sie hat gewisse theoretische Vorteile, wie wir in den folgenden Abschnitten sehen werden. (Vgl. auch Aufgabe 11.1.)

11.2 Lagrange-Funktionen in der relativistischen Feldtheorie

Ein *Teilchen* ist seiner Natur nach ein *lokalisiertes* Wesen; in der klassischen Mechanik sind wir typischerweise daran interessiert, seinen *Ort* als eine Funktion der Zeit zu berechnen: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Ein *Feld* nimmt auf der anderen Seite eine *Region* des Raumes ein; in der Feldtheorie beschäftigen wir uns mit der Berechnung einer oder mehrerer Funtionen von *Ort und Zeit*: $\phi_i(x, y, z, t)$. Die Feldvariable ϕ_i kann zum Beispiel die Temperatur an jedem Punkt in einem Raum oder das elektrische Potential V oder die drei Komponenten des magnetischen Feldes $\boldsymbol{B}$ sein. In der Teilchenmechanik haben wir eine Lagrange-Funktion L eingeführt, die eine Funktion der Koordinaten q_i und ihrer zeitlichen Ableitungen $\dot{q}_i$ ist; in der Feldtheorie beginnen wir mit einer Lagrange-Funktion (eigentlich einer Lagrange*dichte*) $\mathcal{L}$, die eine Funktion der Felder ϕ_i und ihrer x-, y-, z- und t-Ableitungen ist:

$$\partial_\mu \phi_i \equiv \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu} \tag{11.9}$$

Im ersten Fall umfaßt die linke Seite der Euler-Lagrange-Gleichung (11.6) nur *zeitliche* Ableitungen; eine *relativistische* Theorie muß Raum- und Zeitkoordinaten auf gleicher Basis behandeln, und die Euler-Lagrange-Gleichungen verallgemeinern, wie man erwarten konnte:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{11.10}$$

Beispiel 11.1 Die Klein-Gordon-Lagrange-Funktion für ein skalares Feld (Spin 0)

Nehmen wir an, wir haben eine einzige, skalare Feldvariable ϕ, und die Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2 \tag{11.11}$$

Für diesen Fall ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \tag{11.12}$$

(Wenn Sie das irritiert, schreiben Sie die Lagrange-Funktion in „Langschrift“:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_0\phi\partial_0\phi - \partial_1\phi\partial_1\phi - \partial_2\phi\partial_2\phi - \partial_3\phi\partial_3\phi] - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2$$

In dieser Form ist klar, daß

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi = \partial^0\phi, \qquad \frac{\partial}{\partial(\partial_1\phi)} = -\partial_1\phi = \partial^1\phi$$

und so weiter sind.) Weiter gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi$$

und somit verlangt die Euler-Lagrange-Formel, daß

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi = 0 \tag{11.13}$$

ist, was mit der Klein-Gordon-Gleichung [Gl. (7.9)] übereinstimmt, die (in der Quantenfeldtheorie) ein Teilchen mit Spin 0 und Masse m beschreibt.

Beispiel 11.2 Die Dirac-Lagrange-Funktion für ein Spinorfeld (Spin $\frac{1}{2}$)

Betrachten wir nun ein Spinorfeld ψ und die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = i(\hbar c)\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2)\bar{\psi}\psi \tag{11.14}$$

Wir behandeln ψ und den adjungierten Spinor $\bar{\psi}$ als unabhängige Feldvariablen.* Anwenden der Euler-Lagrange-Gleichung auf $\bar{\psi}$ ergibt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\hbar c\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \psi$$

*Da ψ ein komplexer Spinor ist, gibt es hier sogar *acht* unabhängige Felder (i läuft von 1 bis 8): die reellen und imaginären Anteile jeder der vier Komponenten von ψ. Aber beim Verwenden der Euler-Lagrange-Gleichungen eignet sich jede lineare Kombination dieser acht ebenso gut, und wir wählen für unseren Gebrauch die vier Komponenten von ψ und die vier Komponenten von $\bar{\psi}$.

so daß

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0 \tag{11.15}$$

gilt. Dies ist die Dirac-Gleichung [Gl. (7.20)], die (in der Quantenfeldtheorie) ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ und Masse m beschreibt. Wenn wir weiter die Euler-Lagrange-Gleichung auf ψ anwenden, so erhalten wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -mc^2\bar{\psi}$$

und folglich ist

$$i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\bar{\psi} = 0$$

was die Adjungierte der Dirac-Gleichung ist (vgl. Aufgabe 7.13).

Beispiel 11.3 Die Proca-Lagrange-Funktion für ein Vektorfeld (Spin 1)
Nehmen wir schließlich ein Vektorfeld A^μ mit der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu \tag{11.16}$$

an. Hier ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{-1}{4\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \tag{11.17}$$

(vgl. Aufgabe 11.2), und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu \tag{11.18}$$

so daß die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \tag{11.19}$$

liefert. Dies wird die Proca-Gleichung genannt; sie beschreibt ein Teilchen mit Spin 1 und Masse m. Übrigens, da die Kombination $(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ wiederholt in dieser Theorie auftaucht, ist es nützlich, die Abkürzung

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{11.20}$$

einzuführen. Dann lautet die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu \tag{11.21}$$

und die Feldgleichung wird zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \tag{11.22}$$

Wenn die Schreibweise anfängt, Sie an die Elektrodynamik zu erinnern, so ist das nicht zufällig, denn das elektromagnetische Feld *ist* genau so ein masseloses Vektorfeld; wenn man in Gleichung (11.22) $m = 0$ setzt, erhält man die Maxwell-Gleichungen für das Vakuum.

Die Lagrange-Funktionen in diesen Beispielen kamen aus dem Nichts (oder vielmehr, sie wurden so ausgeheckt, daß sie die gewünschten Feldgleichungen ergaben). In der klassischen Teilchenmechanik wird L *hergeleitet* ($L = T - U$), aber in der relativistischen Feldtheorie wird $\mathcal{L}$ für gewöhnlich als *Axiom* eingeführt – wir müssen schließlich *irgendwo* anfangen. Die Lagrange-Funktion für ein bestimmtes System ist keinesfalls einzigartig; man kann $\mathcal{L}$ immer mit einer Konstante multiplizieren oder eine Divergenz addieren ($\partial_\mu M^\mu$, worin M^μ eine Funktion von ϕ_i und $\partial_\mu \phi_i$ ist) – solche Terme kürzen sich heraus, wenn man die Euler-Lagrange-Gleichungen anwendet, so daß sie sich nicht auf die Feldgleichungen auswirken. In diesem Sinn sind Faktoren wie die $\frac{1}{2}$ in der Klein-Gordon-Lagrange-Funktion reine Konvention.* Abgesehen davon, haben wir hier jedoch *die* Lagrange-Funktionen für Spin 0, Spin $\frac{1}{2}$ und Spin 1. Bisher sprechen wir allerdings nur von *freien* Feldern ohne Quellen oder Wechselwirkungen.

Beispiel 11.4 Die Maxwell-Lagrange-Funktion für ein masseloses Vektorfeld mit der Quelle J^μ

Nehmen wir an, es ist

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} J^\mu A_\mu \tag{11.23}$$

worin $F^{\mu\nu}$ (erneut) für $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ steht und J^μ eine bestimmte Funktion ist. Die Euler-Lagrange-Gleichungen liefern

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \tag{11.24}$$

was (wie wir in Kapitel 7, Abschnitt 7.4, herausgefunden haben) die Tensorform der Maxwell-Gleichungen ist, die die elektromagnetischen Felder beschreibt, welche durch einen Strom J^μ erzeugt werden. Übrigens folgt aus Gleichung (11.24), daß

$$\partial_\nu J^\nu = 0 \tag{11.25}$$

ist. Das bedeutet, daß die interne Struktur der Maxwell-Lagrange-Funktion (11.23) dazu führt, daß der Strom die Kontinuitätsgleichung (7.74) erfüllt; *welche* alte Funktion Sie auch für J^μ einsetzen – sie muß der Ladungserhaltung gehorchen.

---

*Die Lagrange-Funktion (L) hat die Einheit einer Energie [Gl. (11.4)], und die Lagrange*dichte* ($\mathcal{L}$) hat die Einheit von Energie *pro Einheitsvolumen*. Die *Felder* haben folgende Dimensionen:

ϕ (skalares Feld):	$\sqrt{ML}/T$
ψ (Spinorfeld):	$L^{-3/2}$
A^μ (Vektorfeld):	$\sqrt{ML}/T$

Sie sind so gewählt, daß ψ (im nicht-relativistischen Fall) in die Schrödinger-Wellenfunktion und A^μ (im nicht-quantenmechanischen Fall) in das Maxwellsche Vektorpotential übergehen. Übrigens: In Heaviside-Lorentz-Einheiten würde man die Proca- und Maxwell-Lagrange-Funktionen mit 4π multiplizieren.

11.3 Lokale Eichinvarianz

Beachten Sie, daß die Dirac-Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi \tag{11.14}$$

invariant unter der Transformation

$$\psi \to e^{i\theta}\psi \qquad \text{(globale Eichtransformation)} \tag{11.26}$$

ist (worin θ irgendeine reelle Zahl ist), denn dann geht $\bar{\psi} \to e^{-i\theta}\bar{\psi}$ und in der Kombination $\bar{\psi}\psi$ kürzen sich die exponentiellen Faktoren heraus. Aus historischen Gründen nennen wir (11.26) eine (globale) *Eichtransformation* („Phasentransformation" wäre ein passenderer Ausdruck). Aber was ist, wenn der Phasenfaktor an verschiedenen Raumzeitpunkten unterschiedlich ist; das heißt, *was ist, wenn θ eine Funktion von x^μ ist:*

$$\psi \to e^{i\theta(x)}\psi \qquad \text{(lokale Eichtransformation)} \tag{11.27}$$

Ist die Lagrange-Funktion unter einer solchen *„lokalen"* Eichtransformation invariant? Die Antwort lautet *Nein*, denn jetzt bekommen wir einen zusätzlichen Term aus der Ableitung von θ hinzu:

$$\partial_\mu(e^{i\theta}\psi) = i(\partial_\mu\theta)e^{i\theta}\psi + e^{i\theta}\partial_\mu\psi \tag{11.28}$$

so daß

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - \hbar c(\partial_\mu\theta)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{11.29}$$

geht. Für das, was folgt, ist es nützlich, einen Faktor $-(q/\hbar c)$ aus θ herauszuziehen, was zu

$$\lambda(x) \equiv -\frac{\hbar c}{q}\theta(x) \tag{11.30}$$

führt, worin q die Ladung des beteiligten Teilchens ist. In Abhängigkeit von λ gilt dann

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda \tag{11.31}$$

unter der lokalen Eichtransformation

$$\psi \to e^{-iq\lambda(x)/\hbar c}\psi \tag{11.32}$$

Bisher ist in all dem nichts besonders Neues oder Tiefsinniges. Der entscheidende Punkt tritt auf, wenn wir *verlangen*, daß die *gesamte* Lagrange-Funktion invariant unter lokalen Eichtransformationen sei.* Da die *freie* Dirac-Lagrange-Funktion (11.14)

*Ich weiß von keinem zwingenden Argument, warum eine globale Invarianz notwendigerweise lokal gelten *sollte*. Wenn Sie glauben, daß Eichtransformationen in einem gewissen Sinn „fundamental" sind, dann, so nehme ich an, sollte es möglich sein, sie an raumartig getrennten Punkten (die schließlich nicht miteinander in Verbindung stehen) unabhängig voneinander auszuführen. Aber ich denke, das geht an der eigentlichen Frage vorbei. Deshalb ist es zumindest für den Augenblick besser, die Forderung nach lokaler Eichinvarianz als ein neues, eigenständiges Prinzip der Physik anzusehen.

lokal *nicht* eichinvariant ist, sind wir gezwungen, etwas zu *addieren*, um den zusätzlichen Term in Gleichung (11.31) zu kompensieren. Nehmen wir an,

$$\mathcal{L} = [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc^2\bar{\psi}\psi] - (q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)A_{\mu} \tag{11.33}$$

worin A_{μ} ein *neues* Feld („Eichfeld" genannt) ist, das sich unter lokalen Eichtransformationen gemäß der Regel

$$A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\lambda \tag{11.34}$$

transformiert. Diese „neue, verbesserte" Lagrange-Funktion *ist* nun invariant unter lokalen Eichtransformationen; den Preis, den wir dafür zahlen mußten, war die Einführung eines neuen Vektorfeldes, das durch den letzten Term in Gleichung (11.33) an ψ koppelt (siehe Aufgabe 11.6). Aber Gleichung (11.33) ist nicht die ganze Wahrheit; die *volle* Lagrange-Funktion muß einen „freien" Term für das Eichfeld enthalten. Da es ein Vektorfeld ist, schauen wir auf die Proca-Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{m_A c}{\hbar}\right)^2 A^{\nu}A_{\nu} \tag{11.21}$$

Aber hier ergibt sich ein Problem, denn während $F^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}$ invariant unter (11.34) ist, wie Sie selbst nachprüfen sollten, gilt das für $A^{\nu}A_{\nu}$ *nicht*. *Offensichtlich muß das Eichfeld masselos sein* ($m_A = 0$), da sonst die lokale Eichinvarianz verloren geht.

Die Schlußfolgerung: Wenn wir mit der Dirac-Lagrange-Funktion beginnen und eine lokale Eichinvarianz fordern, dann sind wir gezwungen, ein masseloses Vektorfeld (A^{μ}) einzuführen, und die gesamte Lagrange-Funktion wird zu

$$\mathcal{L} = [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc^2\bar{\psi}\psi] + \left[\frac{-1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right] - [(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)A_{\mu}] \tag{11.35}$$

Wie Sie richtig vermutet haben werden, ist A^{μ} gerade das elektromagnetische Potential; die Eichtransformationsregel für A^{μ} hatten wir schon in Kapitel 7 [Gl. (7.81)] gefunden, und die letzten zwei Terme in Gleichung (11.35) geben die Maxwell-Lagrange-Funktion (11.23) mit der Stromdichte

$$J^{\mu} = cq(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) \tag{11.36}$$

wieder. Somit erzeugt die Forderung nach lokaler Eichinvarianz, angewandt auf eine freie Dirac-Lagrange-Funktion, die gesamte Elektrodynamik und spezifiziert den Strom, den die Dirac-Teilchen hervorrufen.

Für den Fall, daß Ihnen die Prozedur der lokalen Eichinvarianz mysteriös erscheint, gehen wir sie noch einmal durch und sehen uns an, was sie eigentlich enthält. Der Unterschied zwischen globalen und lokalen Eichtransformationen tritt auf, wenn wir die *Ableitungen* der Felder berechnen [Gl. (11.28)]:

$$\partial_{\mu}\psi \to e^{-iq\lambda/\hbar c}\left[\partial_{\mu} - i\frac{q}{\hbar c}(\partial_{\mu}\lambda)\right]\psi \tag{11.37}$$

Anstelle eines einfachen Phasenfaktors erhalten wir einen zusätzlichen Term mit $\partial_{\mu}\lambda$. *Wenn wir in der ursprünglichen (freien) Lagrange-Funktion jede Ableitung (∂_{μ}) durch* *die sogenannte „kovariante Ableitung"*

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu \tag{11.38}$$

ersetzen, so wird die Transformation von A_μ [Gl. (11.34)] den störenden Term in Gleichung (11.37) aufheben:

$$\mathcal{D}_\mu\psi \rightarrow e^{-iq\lambda/\hbar c}\mathcal{D}_\mu\psi \tag{11.39}$$

und die Invarianz von $\mathcal{L}$ ist wiederhergestellt. Die Ersetzung von ∂_μ durch $\mathcal{D}_\mu$ ist also ein einfaches Mittel, um eine *global* invariante Lagrange-Funktion in eine *lokal* invariante umzuwandeln; wir nennen das die *„minimale Kopplungsregel"* [tatsächlich habe ich genau diese benutzt, um den zusätzlichen Term in Gl. (11.33) zu erzeugen].* Aber die kovariante Ableitung führt ein neues Vektorfeld (A_μ) ein, welches seine eigene *freie* Lagrange-Funktion benötigt; wenn letztere die lokale Eichinvarianz nicht verderben soll, müssen wir Eichfelder als masselos annehmen. Dies führt auf den letzten Ausdruck (11.35), den Fachleute sofort als die Lagrange-Funktion für die Quantenelektrodynamik erkennen würden – Dirac-Felder (Elektronen und Positronen), die mit Maxwell-Feldern (Photonen) wechselwirken.

Die Idee der lokalen Eichinvarianz geht zurück auf die Arbeit von Hermann Weyl aus dem Jahr 1919.[3] Ihre Stärke und Allgemeingültigkeit wurde jedoch bis in die frühen siebziger Jahre nicht vollständig erkannt. Unser Ausgangspunkt – die globale Phasentransformation (11.26) – kann man sich als Multiplikation von ψ mit einer unitären 1×1-Matrix vorstellen:

$$\psi \rightarrow U\psi, \qquad \text{worin } U^\dagger U = 1 \tag{11.40}$$

(hier ist $U = e^{i\theta}$). Die Gruppe *aller* solcher Matrizen ist $U(1)$ (vgl. Tabelle 4.2), und folglich wird die betroffene Symmetrie „$U(1)$-Eichinvarianz" genannt. Diese Terminologie ist extravagant, was den vorliegenden Fall angeht (eine 1×1-Matrix ist eine *Zahl*, also warum lassen wir es nicht dabei?), aber im Jahre 1954 wandten Yang und Mills[4] dieselbe Strategie (darauf bestehend, daß eine *globale* Invarianz lokal gelte) auf die Gruppe $SU(2)$ an, und später wurde die Idee auf die Farb-$SU(3)$ ausgedehnt, was zur Chromodynamik führte. Im Standardmodell werden *alle* fundamentalen Wechselwirkungen auf diese Weise hervorgerufen.

11.4 Yang-Mills-Theorie

Nehmen wir nun an, daß wir *zwei* Spin-$\frac{1}{2}$-Felder, ψ_1 und ψ_2, haben. Die Lagrange-Funktion in Abwesenheit jeglicher Wechselwirkung lautet

$$\mathcal{L} = [i\hbar c\bar{\psi}_1\gamma^\mu\partial_\mu\psi_1 - m_1c^2\bar{\psi}_1\psi_1] + [i\hbar c\bar{\psi}_2\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2 - m_2c^2\bar{\psi}_2\psi_2] \tag{11.41}$$

*Die minimale Kopplungsregel ist viel älter als das Prinzip der lokalen Eichinvarianz. Für den Impuls [$p_\mu \leftrightarrow i\hbar\partial_\mu$, vgl. Gl. (7.5)] lautet sie $p_\mu \rightarrow p_\mu - i(q/c)A_\mu$ und ist ein bekannter Trick in der klassischen Elektrodynamik, um die Bewegungsgleichungen für ein geladenes Teilchen in Anwesenheit eines elektrodynamischen Feldes zu erhalten. Siehe J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2. Aufl. (New York: Wiley, 1975), Gl. (12.29). In diesem Sinn läuft es auf eine elegante Formulierung des Lorentz-Kraftgesetzes hinaus. In der modernen Teilchentheorie ziehen wir es vor, die lokale Eichinvarianz als grundlegend anzusehen, und die minimale Kopplung ist ein Mittel, das zu erreichen.