Kapitel 3

Relativistische Kinematik

In diesem Kapitel fasse ich die grundlegenden Prinzipien sowie Schreibweise und Terminologie der relativistischen Kinematik zusammen. Diesen Stoff müssen Sie aus dem Effeff beherrschen, um die Kapitel 6 bis 11 verstehen zu können (für die Kapitel 4 und 5 ist er jedoch nicht *nötig, und wenn Sie wollen, können Sie diese zuerst lesen). Obwohl die Behandlung ziemlich umfassend ist, gehe ich davon aus, daß Sie mit der speziellen Relativitätstheorie bereits in Berührung gekommen sind – falls nicht, sollten Sie an dieser Stelle innehalten und das entsprechende Kapitel in irgendeinem in diese Theorie einführenden Text durcharbeiten, bevor Sie weiterlesen. Sollten Sie mit der Relativitätstheorie bereits entsprechend vertraut sein, wird dieses Kapitel eine einfache Wiederholung sein – aber lesen Sie es trotzdem durch, weil ein Teil der Schreibweise neu für Sie sein könnte.*

3.1 Lorentztransformationen

Gemäß der speziellen Relativitätstheorie[1] gelten die physikalischen Gesetze in einem System, das sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, genau so wie in einem Bezugssystem, das ruht. Eine peinliche Folge davon ist, daß es keine Möglichkeit gibt, festzustellen, welches System (wenn überhaupt) *ruht*, und somit gibt es auch keine Möglichkeit, zu wissen, wie groß „die“ Geschwindigkeit irgendeines anderen Systems sein könnte. Ich sollte wohl besser noch einmal von vorn beginnen. Ähem. Gemäß der speziellen Relativitätstheorie[1] gelten die physikalischen Gesetze in jedem *inertialen* Bezugssystem. Ein Inertialsystem ist ein System, in dem das erste Newtonsche Gesetz (das Trägheitsgesetz) gilt: Objekte bewegen sich geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit, solange keine Kraft auf sie einwirkt.* Es ist leicht einzusehen, daß zwei Inertialsysteme sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen müssen und daß jedes System, das sich relativ zu einem Inertialsystem mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, selbst wieder ein Inertialsystem ist.

*Wenn Sie sich fragen sollten, ob ein in einem homogenen Gravitationsfeld frei fallendes System „inertial“ ist, wissen Sie mehr als gut für Sie ist. Wir sollten die Gravitation einfach aus der Sache herauslassen.

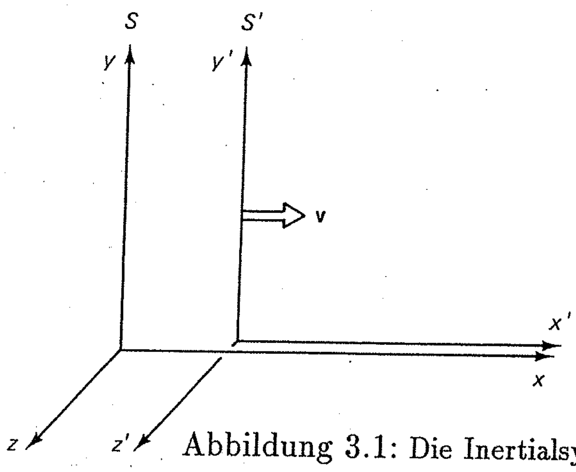

Abbildung 3.1: Die Inertialsysteme S und S'.

Nehmen wir also an, daß wir zwei Inertialsysteme S und S' haben und S' sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ (Betrag v) relativ zu S bewegt (S bewegt sich folglich mit der Geschwindigkeit $-\boldsymbol{v}$ relativ zu S'). Wir können dann unsere Koordinatenachsen so wählen, daß die Bewegung entlang der üblichen x/x'-Achse verläuft (Abb. 3.1), und stellen unsere Uhren im Ursprung eines jeden Systems derart, daß sie beide Null anzeigen, wenn sie zusammenfallen (das heißt, $t = t' = 0$ wenn $x = x' = 0$). Nehmen wir nun weiter an, daß irgendein Ereignis am Ort (x, y, z) zur Zeit t in S stattfindet. Frage: Wie lauten die Raumzeitkoordinaten (x', y', z') und t' *desselben* Ereignisses in S'? Die Anwort wird von den Lorentztransformationen geliefert:

$$\begin{aligned} &\text{i.} && x' = \gamma(x - vt) \\ &\text{ii.} && y' = y \\ &\text{iii.} && z' = z \\ &\text{iv.} && t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

worin

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.2}$$

ist. Die inversen Transformationen, die uns von S' zurück zu S führen, erhält man einfach durch Änderung des Vorzeichens von v (siehe Aufgabe 3.1):

$$\begin{aligned} &\text{i}'. && x = \gamma(x' + vt') \\ &\text{ii}'. && y = y' \\ &\text{iii}'. && z = z' \\ &\text{iv}'. && t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Die Lorentztransformationen haben unmittelbar eine Reihe von Konsequenzen, von denen ich kurz nur die wichtigsten nenne:

1. *Die Relativität der Gleichzeitigkeit:* Wenn zwei Ereignisse zur selben Zeit, aber an verschiedenen Orten in S stattfinden, dann finden sie in S' *nicht* gleichzeitig statt. Genauer gesagt: Wenn $t_A = t_B$ ist, dann ist

$$t'_A = t'_B + \frac{\gamma v}{c^2}(x_B - x_A) \tag{3.4}$$

(s. Aufgabe 3.2). Ereignisse, die in einem Inertialsystem gleichzeitig sind, sind also in anderen nicht gleichzeitig.

2. *Längenkontraktion:* Nehmen wir an, ein Stock liegt, in S' ruhend, auf der x'-Achse. Das eine Ende sei im Ursprung ($x' = 0$) und das andere bei L' (seine Länge in S' ist also L'). Welche Länge liefert die Messung in S? Da sich der Stock relativ zu S *bewegt*, müssen wir darauf bedacht sein, die Positionen seiner zwei Enden im selben Moment, etwa bei $t = 0$, festzuhalten. Zu diesem Zeitpunkt ist das linke Ende bei $x = 0$ und das rechte – gemäß Gleichung (i) – bei $x = L/\gamma$. Somit ist in S die Länge des Stocks $L = L'/\gamma$. Beachten Sie, daß γ immer größer oder gleich 1 ist. Es folgt, daß ein *bewegtes Objekt* im Vergleich mit seiner Länge in seinem Ruhesystem um einen Faktor γ *verkürzt ist*. Beachten Sie, daß die Längenkontraktion nur für Längen *entlang der Bewegungsrichtung* gilt; senkrechte Abstände sind nicht betroffen.

3. *Zeitdilatation:* Nehmen wir an, die Uhr im Ursprung von S' läuft für eine Zeit T'; um der Einfachheit willen sei es von $t' = 0$ bis $t' = T'$. Welches Zeitintervall ergibt die Messung in S? Nun, es beginnt bei $t = 0$ und endet, wenn $t' = T'$ bei $x' = 0$, und somit [nach Gl. (iv')] ist $t = \gamma T'$. Offensichtlich durchläuft die Uhr in S ein um denselben Faktor γ *längeres* Intervall, $T = \gamma T'$; oder andersherum ausgedrückt: *bewegte Uhren gehen langsamer*. Anders als die Längenkontraktion, die für die Elementarteilchenphysik nur indirekte Relevanz besitzt, ist die Zeitdilatation im Labor etwas Alltägliches. Denn in einem gewissen Sinne hat jedes instabile Teilchen eine eingebaute Uhr – was auch immer es sein mag, das dem Teilchen sagt, daß seine Zeit abgelaufen ist. Und diese Uhren laufen in der Tat langsamer, wenn sich das Teilchen bewegt. Das bedeutet, daß ein sich bewegendes Teilchen länger lebt (um den Faktor γ), als wenn es ruhen würde.* (Die tabellierten Lebensdauern gelten natürlich für ruhende Teilchen.) Die Myonen der kosmischen Strahlung, die in der äußeren Atmosphäre erzeugt werden, würden es ohne die Zeitdilatation sogar nie bis zur Erdoberfläche schaffen (s. Aufgabe 3.4).

4. *Addition von Geschwindigkeiten:* Nehmen wir an, ein Teilchen bewege sich mit der Geschwindigkeit u' relativ zu S' in x-Richtung. Welche Geschwindigkeit hat

*Eigentlich ist der Zerfall eines jeden einzelnen Teilchens ein Zufallsprozeß; wenn wir von einer „Lebensdauer" sprechen, meinen wir in Wirklichkeit die *mittlere* Lebensdauer des Teilchentyps. Und wenn ich sage, daß ein sich bewegendes Teilchen länger lebt, dann meine ich eigentlich, daß die *mittlere* Lebensdauer einer *Schar* sich bewegender Teilchen länger ist.

es relativ zu S? Nun, es legt eine Strecke $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$ in der Zeit $\Delta t = \gamma[\Delta t' + (v/c^2)\Delta x']$ zurück, so daß

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + (v/c^2)\Delta x'} = \frac{(\Delta x'/\Delta t') + v}{1 + (v/c^2)(\Delta x'/\Delta t')}$$

ist. Aber $\Delta x/\Delta t = u$ und $\Delta x'/\Delta t' = u'$, so daß

$$u = \frac{u' + v}{1 + (u'v/c^2)} \tag{3.5}$$

ist. Der Zähler entspricht der klassischen Antwort auf dieselbe Frage: $u = u' + v$; der Nenner führt eine relativistische Korrektur ein, die klein ist, solange u' und v nicht nahe c sind. Beachten Sie, daß, falls $u' = c$ gilt, dann ist auch $u = c$: die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich.

3.2 Vierervektoren

Es bietet sich an dieser Stelle an, eine vereinfachende Schreibweise einzuführen. Wir definieren den *Orts-Zeit-Vierervektor* x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, wie folgt:

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z \tag{3.6}$$

Die Lorentztransformationen, ausgedrückt mit Hilfe von x^μ, nehmen eine symmetrischere Form an:

$$\begin{aligned} x^{0\prime} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1\prime} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x^{2\prime} &= x^2 \\ x^{3\prime} &= x^3 \end{aligned} \tag{3.7}$$

worin

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \tag{3.8}$$

ist. Noch kompakter ist

$$x^{\mu\prime} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{3.9}$$

Die Koeffizienten $\Lambda^\mu{}_\nu$ können als Elemente einer Matrix $\mathbf{\Lambda}$ angesehen werden:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

(d.h., $\Lambda^0{}_0 = \Lambda^1{}_1 = \gamma$; $\Lambda^1{}_0 = \Lambda^0{}_1 = -\gamma\beta$; $\Lambda^2{}_2 = \Lambda^3{}_3 = 1$; und alle anderen sind Null). Um das Schreiben vieler Σ's zu vermeiden, werden wir der Einsteinschen „Summenkonvention" folgen, die besagt, daß über wiederholte griechische Indizes (einer tief-, der andere hochgestellt) von 0 bis 3 summiert wird. Somit wird aus Gleichung (3.9) schließlich*

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{3.11}$$

Ein besonderer Vorteil dieser eleganten Schreibweise ist, daß dieselbe Formel Lorentztransformationen beschreibt, die *nicht* entlang der x-Richtung sind; die S- und S'-Achsen brauchen also nicht einmal parallel zu sein; die $\mathbf{\Lambda}$-Matrix ist dann selbstverständlich komplizierter, aber Gleichung (3.11) gilt weiterhin. [Auf der anderen Seite bedeutet die Verwendung des Ausdrucks (3.10) keinen wirklichen Verlust an Allgemeinheit, da wir immer frei sind, parallele Achsen zu *wählen* und die x-Achse auf die Richtung von $\boldsymbol{v}$ auszurichten.]

Obwohl die individuellen Koordinaten eines Ereignisses sich gemäß Gleichung (3.11) ändern, wenn wir von S zu S' übergehen, gibt es doch eine bestimmte *Kombination* von ihnen, die gleich bleibt (Aufgabe 3.7):

$$I \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0\prime})^2 - (x^{1\prime})^2 - (x^{2\prime})^2 - (x^{3\prime})^2 \tag{3.12}$$

Solch eine Größe, die in jedem Inertialsystem denselben Wert annimmt, wird eine *Invariante* genannt. (Im selben Sinne ist die Größe $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ invariant unter *Rotationen*.) Ich würde diese Invariante nun *gerne* als eine Summe schreiben: $\sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x^\mu$, aber unerfreulicherweise gibt es da diese irritierenden Minuszeichen. Um sie im Auge zu behalten, führen wir die *Metrik* $g_{\mu\nu}$ ein, deren Komponenten als eine Matrix $\boldsymbol{g}$ dargestellt werden können:

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

(d.h., $g_{00} = 1$; $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$; alle anderen sind Null).† Mit Hilfe von $g_{\mu\nu}$ kann

*In einem Ausdruck wie diesem ist der benutzte griechische Summationsindex ν natürlich völlig willkürlich. Dasselbe gilt für den Index μ, obwohl er auf beiden Seiten der Gleichung passen muß. Daher könnte Gleichung (3.11) genausogut als $x^{\kappa\prime} = \Lambda^\kappa{}_\lambda x^\lambda$ geschrieben werden. Jeder dieser Ausdrücke steht für den Satz von vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} x^{0\prime} &= \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_1 x^1 + \Lambda^0{}_2 x^2 + \Lambda^0{}_3 x^3 \\ x^{1\prime} &= \Lambda^1{}_0 x^0 + \Lambda^1{}_1 x^1 + \Lambda^1{}_2 x^2 + \Lambda^1{}_3 x^3 \\ x^{2\prime} &= \Lambda^2{}_0 x^0 + \Lambda^2{}_1 x^1 + \Lambda^2{}_2 x^2 + \Lambda^2{}_3 x^3 \\ x^{3\prime} &= \Lambda^3{}_0 x^0 + \Lambda^3{}_1 x^1 + \Lambda^3{}_2 x^2 + \Lambda^3{}_3 x^3 \end{aligned}$$

†Ich sollte Sie davor warnen, daß manche Physiker die Metrik mit den entgegengesetzten Vorzeichen $(-1, 1, 1, 1)$ definieren. Das ist nicht weiter *schlimm* – wenn I invariant ist, so auch $-I$. Es bedeutet jedoch, daß Sie auf ungewohnte Vorzeichen achten müssen. Zum Glück bedienen sich die meisten *Teilchen*physiker heutzutage der Konvention in Gleichung (3.13).

die Invariante I als Doppelsumme geschrieben werden:

$$I = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \tag{3.14}$$

Indem wir die Sache etwas weitertreiben, definieren wir den *kovarianten* Vierervektor x_μ (Index *unten*) wie folgt:

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu \tag{3.15}$$

(d.h., $x_0 = x^0$, $x_1 = -x^1$, $x_2 = -x^2$, $x_3 = -x^3$). Um den Unterschied zu betonen, nennen wir den „ursprünglichen" Vierervektor x^μ (Index *oben*) einen *kontravarianten* Vierervektor. In ihrer saubersten Form kann die Invariante I dann geschrieben werden als:

$$I = x_\mu x^\mu \tag{3.16}$$

All dies wird zweifellos wie eine monströse Übertreibung der Schreibweise erscheinen, nur um drei Minuszeichen zu berücksichtigen, aber es ist in Wirklichkeit sehr einfach, wenn Sie sich erst einmal daran gewöhnt haben. (Darüber hinaus ist es eine Verallgemeinerung, die sich netterweise auch auf nicht-kartesische Koordinatensysteme und auf die gekrümmten Räume erstreckt, wie man sie in der Allgemeinen Relativitätstheorie antrifft, obwohl nichts davon für uns an dieser Stelle relevant ist.)

Der Orts-Zeit-Vierervektor x^μ ist der Urtyp aller Vierervektoren. Wir definieren einen Vierervektor a^μ als ein vierkomponentiges Objekt, das sich in derselben Weise wie x^μ transformieren läßt, wenn wir von einem Inertialsystem in ein anderes übergehen, nämlich:

$$a^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu \tag{3.17}$$

mit denselben Koeffizienten Λ^μ_ν. Zu einem jeden solchen (kontravarianten) Vierervektor assoziieren wir einen *ko*varianten Vierervektor a_μ, den wir durch einfaches Ändern der Vorzeichen der räumlichen Komponenten erhalten oder formaler:

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu \tag{3.18}$$

Natürlich können wir durch erneutes Ändern der Vorzeichen wieder von kovariant zurück zu kontravariant wechseln:

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \tag{3.19}$$

worin die $g^{\mu\nu}$ genaugenommen die Elemente der Matrix g^{-1} sind (da unsere Metrik jedoch ihr eigenes Inverses darstellt, ist $g^{\mu\nu}$ dasselbe wie $g_{\mu\nu}$). Bei beliebigen zwei Vierervektoren a^μ und b^μ ist die Größe

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \tag{3.20}$$

invariant (dieselbe Zahl in jedem Inertialsystem). Wir werden sie als das *Skalarprodukt* von a und b bezeichnen; es ist das vierdimensionale Analogon zum Skalarprodukt zweier Dreiervektoren (es gibt kein Vierervektor-Analogon zum Kreuzprodukt).*

*Am nächsten kommt dem noch $(a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu)$, aber das ist ein *Tensor* zweiter Stufe und kein Vierervektor (siehe unten).

Wenn Sie es müde werden, Indizes zu schreiben, benutzen Sie ruhig die Skalarproduktschreibweise:

$$a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu \tag{3.21}$$

Sie werden dann allerdings eine Methode benötigen, um dieses vierdimensionale Skalarprodukt von dem gewöhnlichen Skalarprodukt zweier Dreiervektoren zu unterscheiden. Der beste Weg ist, genauestens darauf zu achten, über alle Dreiervektoren einen Pfeil zu setzen (außer vielleicht über die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, die keine Zweideutigkeit zuläßt, da sie nicht Teil eines Vierervektors ist). In diesem Buch benutze ich Fettdruck für Dreiervektoren. Und somit ist

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \tag{3.22}$$

Wir benutzen ebenfalls die Schreibweise a^2 für das Skalarprodukt von a^μ mit sich selbst:

$$a^2 \equiv a \cdot a = (a^0)^2 - \boldsymbol{a}^2 \tag{3.23}$$

Beachten Sie jedoch, daß a^2 nicht positiv sein muß. Tatsächlich können wir alle Vierervektoren nach dem Vorzeichen von a^2 klassifizieren:

$$\begin{array}{ll} \text{Wenn } a^2 > 0, & \text{wird } a^\mu \textit{ zeitartig} \text{ genannt} \\ \text{Wenn } a^2 < 0, & \text{wird } a^\mu \textit{ raumartig} \text{ genannt} \\ \text{Wenn } a^2 = 0, & \text{wird } a^\mu \textit{ lichtartig} \text{ genannt} \end{array} \tag{3.24}$$

Von *Vektoren* ist es ein kurzer Schritt hin zu *Tensoren*: ein Tensor zweiter Stufe, $s^{\mu\nu}$, trägt zwei Indizes, hat $4^2 = 16$ Komponenten und transformiert sich mit *zwei* Λ-Faktoren:

$$s^{\mu\nu\prime} = \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\sigma s^{\kappa\sigma} \tag{3.25}$$

ein Tensor dritter Stufe, $t^{\mu\nu\lambda}$, hat drei Indizes, $4^3 = 64$ Komponenten und transformiert sich mit *drei* Λ-Faktoren:

$$t^{\mu\nu\lambda\prime} = \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\sigma \Lambda^\lambda{}_\tau t^{\kappa\sigma\tau} \tag{3.26}$$

und so weiter. In dieser Hierarchie ist ein Vektor ein Tensor der Stufe 1 und ein Skalar (invariant) ein Tensor der Stufe Null. Wir konstruieren kovariante und „gemischte" Tensoren, indem wir Indizes senken (auf Kosten eines Minuszeichens für jeden räumlichen Index), zum Beispiel

$$s^\mu_\nu = g_{\nu\lambda} s^{\mu\lambda}; \qquad s_{\mu\nu} = g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} s^{\kappa\lambda} \tag{3.27}$$

und so weiter. Beachten Sie, daß das Produkt zweier Tensoren selbst ein Tensor ist [$(a^\mu b^\nu)$ ist ein Tensor zweiter Stufe; $(a^\mu t^{\nu\lambda\sigma})$ ist ein Tensor vierter Stufe; und so weiter]. Schließlich können wir von jedem Tensor $n+2$-ter Stufe eine „verjüngte" Version n-ter Stufe erhalten, indem wir über gleiche obere und untere Indizes summieren. Demnach ist s^μ_μ ein Skalar; $t^{\mu\nu}{}_\nu$ ist ein Vektor; $a_\mu t^{\mu\nu\lambda}$ ist ein Tensor zweiter Stufe.

3.3 Energie und Impuls

Nehmen Sie an, Sie fahren auf der Autobahn, und stellen Sie sich – der Argumentation zuliebe – vor, Sie bewegten sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit. Sie könnten ein Interesse daran haben, zwei verschiedene „Zeiten“ zu überwachen: wenn Sie sich Sorgen darüber machen, ob Sie es bis zu einer Verabredung in San Francisco schaffen, sollten Sie dann und wann die feststehenden Uhren am Wegesrand ablesen. Aber wenn Sie sich fragen, wann es wohl angemessen sein wird, für einen Imbiß zu halten, wäre es sinnvoller, auf Ihre Armbanduhr zu achten. Denn nach der Relativitätstheorie läuft die bewegte Uhr (in diesem Fall Ihre Armbanduhr) langsamer (relativ zu den feststehenden Uhren am Boden), und dasselbe gilt für Ihren Herzschlag, Ihren Stoffwechsel, Ihre Sprache und Ihr Denken, *alles*. Insbesondere gilt: während die „Bodenzeit“ um einen unendlich kleinen Zeitraum dt fortschreitet, läuft Ihre *eigene* Zeit um den kleineren Zeitraum $d\tau$ weiter:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \tag{3.28}$$

Bei normalen Fahrgeschwindigkeiten ist γ natürlich so nahe an 1, daß dt und $d\tau$ im wesentlichen identisch sind, aber in der Elementarteilchenphysik ist der Unterschied zwischen Laborzeit (von der Uhr an der Wand abgelesen) und der Teilchenzeit (wie sie auf der Armbanduhr des Teilchens erscheinen würde) von entscheidender Bedeutung. Obwohl wir unter Verwendung von Gleichung (3.28) immer von einer zur anderen kommen können, ist es für gewöhnlich zweckmäßiger, mit der Eigenzeit zu arbeiten, weil τ invariant ist. Alle Beobachter können die Armbanduhr des Teilchens ablesen, und zu jedem Zeitpunkt müssen sie alle darin übereinstimmen, was sie anzeigt, selbst wenn ihre eigenen Uhren davon und voneinander abweichen.

Wenn wir von der „Geschwindigkeit“ eines Teilchens sprechen (in bezug auf das Labor), meinen wir natürlich die Distanz, die es zurücklegt (gemessen im Laborsystem), geteilt durch die benötigte Zeit (gemessen mit der Laboruhr):

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{3.29}$$

Aber angesichts dessen, was gerade festgestellt wurde, ist es ebenfalls nützlich, die Eigengeschwindigkeit η einzuführen, die sich aus der zurückgelegten Entfernung (wieder gemessen im Laborsystem) geteilt durch die *Eigen*zeit ergibt:*

$$\eta \equiv \frac{dx}{d\tau} \tag{3.30}$$

*Die Eigengeschwindigkeit ist insofern eine zwitterhafte Größe, als die Entfernung im Laborsystem gemessen wird, während die Zeit im Teilchensystem bestimmt wird. Einige Leute erheben in diesem Zusammenhang Einwände gegen das Adjektiv „eigen“ und argumentieren, daß dieser Ausdruck für Größen reserviert bleiben sollte, die ausschließlich im Teilchensystem gemessen werden. Selbstverständlich bewegt sich das Teilchen in *seinem* System überhaupt nie – seine Geschwindigkeit ist Null. Wenn meine Terminologie Sie stört, nennen Sie η die „Vierergeschwindigkeit“. Ich sollte hinzufügen, daß, obwohl die Eigengeschwindigkeit die zweckmäßigere *Rechen*größe ist, die gewöhnliche Geschwindigkeit aus der Sicht eines Beobachters, der das Teilchen vorbeifliegen sieht, weiterhin die *natürlichere* Größe ist.

Entsprechend Gleichung (3.28) sind die beiden Geschwindigkeiten durch den Faktor γ miteinander verknüpft:

$$\boldsymbol{\eta} = \gamma \boldsymbol{v} \tag{3.31}$$

Es ist jedoch sehr viel einfacher, mit $\boldsymbol{\eta}$ zu arbeiten, denn wenn wir vom Laborsystem S zu einem bewegten System S' übergehen wollen, *müssen sowohl der Zähler als auch der Nenner in (3.29) transformiert werden* [was zu der unhandlichen Additionsregel für Geschwindigkeiten (3.5) führt], wohingegen sich in Gleichung (3.30) *nur der Zähler transformiert*; wie wir gesehen haben, ist $d\tau$ invariant. Die Eigengeschwindigkeit ist sogar Teil eines Vierervektors:

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{3.32}$$

dessen nullte Komponente lautet:

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{(1/\gamma)dt} = \gamma c \tag{3.33}$$

Somit ist

$$\eta^\mu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) \tag{3.34}$$

Übrigens sollte $\eta_\mu \eta^\mu$ invariant sein – und *ist* es auch:

$$\eta_\mu \eta^\mu = \gamma^2(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2 \tag{3.35}$$

Invarianter geht's nicht mehr!

Klassisch gesehen ist der Impuls Masse mal Geschwindigkeit. Wir würden das gern in die Relativität hinübertragen, aber die Frage erhebt sich: Welche Geschwindigkeit sollen wir verwenden – die *gewöhnliche* Geschwindigkeit oder die *Eigen*geschwindigkeit? Klassische Überlegungen liefern keinerlei Hinweis, denn im nichtrelativistischen Bereich sind die beiden identisch. In gewisser Weise ist es lediglich eine Frage der Definition, aber es gibt einen subtilen und zwingenden Grund, warum die gewöhnliche Geschwindigkeit eine *schlechte* Wahl darstellen würde, wohingegen die Eigengeschwindigkeit eine *gute* Wahl ist. Der springende Punkt ist: Wenn wir den Impuls als $m\boldsymbol{v}$ definierten, dann würde das Gesetz der Impulserhaltung im Widerspruch zum Relativitätsprinzip stehen (wenn es in einem Inertialsystem gälte, würde es in einem anderen *nicht* gelten). Aber wenn wir den Impuls als $m\boldsymbol{\eta}$ definieren, dann ist die Impulserhaltung in Übereinstimmung mit dem Relativitätsprinzip (wenn es in einem Inertialsystem gilt, dann gilt es automatisch in allen Inertialsystemen). Ich werde Sie dies in Aufgabe 3.10 selbst beweisen lassen. Das garantiert allerdings nicht, *daß* der Impuls erhalten ist; das ist eine Frage, die von *Experimenten* entschieden wird. Aber es *besagt*, daß, wenn wir hoffen, die Impulserhaltung auf den relativistischen Bereich auszudehnen, dann sollten wir den Impuls besser *nicht* als $m\boldsymbol{v}$ definieren, wohingegen $m\boldsymbol{\eta}$ völlig akzeptabel ist.

Das ist ein kniffliges Argument, und wenn Sie es nicht nachvollzogen haben, versuchen Sie, den letzten Absatz noch einmal zu lesen. Das Ergebnis ist, daß der Impuls in der Relativitätstheorie als Masse mal *Eigen*geschwindigkeit definiert ist:

$$\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{\eta} \tag{3.36}$$

Da die Eigengeschwindigkeit Teil eines Vierervektors ist, gilt dasselbe für den Impuls:

$$p^\mu = m\eta^\mu \tag{3.37}$$

Die räumlichen Komponenten von p^μ bilden den (relativistischen) Impuls-Dreiervektor:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.38}$$

Derweil ist die „Zeitkomponente"

$$p^0 = \gamma mc \tag{3.39}$$

Aus Gründen, die in Kürze deutlich werden, definieren wir die „relativistische *Energie*" E als

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.40}$$

Die nullte Komponente von p^μ ist somit E/c. Folglich bilden Energie und Impuls zusammen einen Vierervektor – den *Energie-Impuls-Vierervektor*:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) \tag{3.41}$$

Aus den Gleichungen (3.35) und (3.37) erhalten wir damit übrigens

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}^2 = m^2c^2 \tag{3.42}$$

was offensichtlich wieder invariant ist.
Der relativistische Impuls (3.38) geht im nicht-relativistischen Bereich ($v \ll c$) in den klassischen Ausdruck über; dasselbe kann für die relativistische Energie (3.40) allerdings nicht gesagt werden. Um zu sehen, wie es dazu kommt, daß diese Größe „Energie" genannt wird, entwickeln wir die Wurzel in eine Taylorreihe:

$$E = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \ldots \tag{3.43}$$

Beachten Sie, daß der zweite Term hier der klassischen kinetischen Energie entspricht, während der führende Term (mc^2) eine Konstante ist. Nun mögen Sie sich erinnern, daß in der klassischen Mechanik nur *Änderungen* der Energie physikalische Bedeutung haben – Sie können ungestraft eine Konstante addieren. In diesem Sinne *ist* die Formel im Bereich von $v \ll c$ in Übereinstimmung mit der klassischen, falls die Terme höherer Ordnung in der Entwicklung vernachlässigbar sind. Der konstante Term, der sogar weiterbesteht, wenn $v = 0$, wird *Ruheenergie* genannt

$$R \equiv mc^2 \tag{3.44}$$

und das Restglied, dessen Energie der Bewegung des Teilchen zuzurechnen ist, ist die *relativistische kinetische Energie*:

$$T \equiv mc^2(\gamma - 1) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \ldots \tag{3.45}$$

(Beachten Sie, daß ich überhaupt nicht von *relativistischer Masse* gesprochen habe. Das ist eine überflüssige Größe, die keinerlei nützliche Funktion besitzt. Falls Sie darauf stoßen sollten: ihre Definition ist $m_{rel} \equiv \gamma m$; sie ist ausgestorben, weil sie sich lediglich durch den Faktor c^2 von E unterscheidet. Was auch immer über m_{rel} gesagt werden kann, könnte genausogut über E gesagt werden: zum Beispiel ist die „Erhaltung der relativistischen Masse" nichts anderes als die *Energie*erhaltung, geteilt durch einen Faktor c^2.)

In der klassischen Mechanik gibt es so etwas wie ein masseloses Teilchen nicht; sein Impuls (mv) wäre Null, seine kinetische Energie wäre Null, es könnte keine Kraftwirkung erfahren, da $F = ma$ gilt – es wäre ein dynamisches Nichts. Auf den ersten Blick könnte man annehmen, daß dasselbe für die Relativitätstheorie gelte, aber eine sorgfältige Betrachtung der Formeln

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.46}$$

läßt ein Schlupfloch erkennen: Wenn $m = 0$ ist, sind die Zähler Null, aber wenn zusätzlich $v = c$ gilt, verschwinden die Nenner ebenfalls, und diese Gleichungen sind unbestimmt (0/0). Daher ist es durchaus möglich, daß wir $m = 0$ *erlauben könnten, vorausgesetzt, das Teilchen bewegt sich immer mit Lichtgeschwindigkeit*. In diesem Fall wird Gleichung (3.46) nicht der Definition von E und $\mathbf{p}$ dienen; nichtsdestotrotz gilt Gleichung (3.42) vermutlich weiterhin, so daß für masselose Teilchen

$$E = |\mathbf{p}|c \tag{3.47}$$

gilt. Persönlich würde ich dieses „Argument" als einen Witz ansehen, wenn es da nicht wenigstens zwei Arten von masselosen Teilchen gäbe (das Photon und die Neutrinos), von denen wir wissen, daß sie in der Natur vorkommen. Sie bewegen sich in der Tat mit Lichtgeschwindigkeit, und ihre Energie und ihr Impuls *sind* über Gleichung (3.47) miteinander verknüpft. Folglich müssen wir das Schlupfloch wohl ernst nehmen. Mit gutem Recht können Sie fragen: Wenn die Gleichungen (3.46) $\mathbf{p}$ und E nicht definieren, was bestimmt *dann* den Impuls und die Energie eines masselosen Teilchens? Nicht die Masse (die ist gemäß Voraussetzung Null); nicht die Geschwindigkeit (die ist immer c). Wie unterscheidet sich also ein Photon mit einer Energie von 2 eV von einem Photon mit einer Energie von 3 eV? Die Relativitätstheorie bietet keine Antwort auf diese Frage, aber interessanterweise *tut* dies die *Quanten*mechanik, und zwar in Form der Planckschen Formel:

$$E = h\nu \tag{3.48}$$

Es ist die *Frequenz* des Photons, die seine Energie und seinen Impuls bestimmt. Das 2 eV-Photon ist *rot* und das 3 eV-Photon ist *violett*!

3.4 Stöße

Der Grund für die Einführung von Energie und Impuls ist natürlich, daß diese Größen in jedem physikalischen Prozeß *erhalten* sind. In der Relativitätstheorie wie auch in der klassischen Mechanik läßt sich dieser Erhaltungssatz am besten auf *Stöße* anwenden.

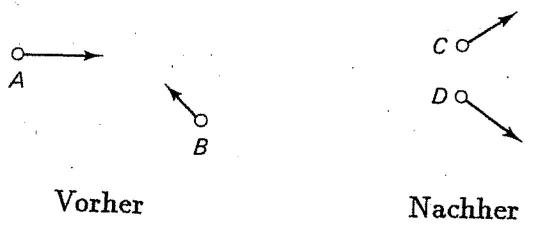

Abbildung 3.2: Ein Stoß, in dem $A + B \to C + D$ übergeht.

Stellen Sie sich zunächst einen klassischen Stoß vor, in dem Objekt A auf Objekt B trifft (beispielsweise zwei Wagen auf einer Luftkissenbahn) und die Objekte C und D erzeugt werden. (S. Abb. 3.2.) Natürlich können C und D identisch mit A und B sein; aber wir können genausogut zulassen, daß B etwas Farbe (oder sonst etwas) von A abkratzt, so daß die Endmassen nicht mit den Ausgangsmassen übereinstimmen. (Wir *nehmen* allerdings *an*, daß A, B, C und D die einzigen Akteure in dem Drama sind; wenn ein Bruchstück W auf der Szene zurückbliebe, dann würden wir von einem komplizierteren Prozeß sprechen: $A+B \to C+D+W$.) Typischerweise läuft ein Stoß so schnell ab, daß keine *externe* Kraft wie Gravitation oder Reibungswiderstand einen nennenswerten Einfluß hat. Klassisch sind Masse und Impuls in einem solchen Prozeß immer erhalten; die kinetische Energie kann erhalten sein oder auch nicht.

Klassische Stöße

1. Die Masse bleibt erhalten: $m_A + m_B = m_C + m_D$.
2. Der Impuls bleibt erhalten: $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_C + \mathbf{p}_D$.
3. Die kinetische Energie bleibt erhalten oder nicht.

Tatsächlich können wir drei Arten von Stößen unterscheiden: „klebrige", bei denen die kinetische Energie *abnimmt* (typischerweise wird die Differenz in Wärme umgewandelt); „explosive", bei denen die kinetische Energie *zunimmt* (zum Beispiel könnte man annehmen, daß A eine gespannte Feder auf seiner vorderen Stoßstange hat, die sich während des Aufpralls löst, so daß die Federspannung in kinetische Energie umgewandelt wird); und *elastische*, in denen die kinetische Energie erhalten bleibt.

Stoßarten (klassisch)

(a) *Klebrig:* Die kinetische Energie nimmt ab: $T_A + T_B > T_C + T_D$.
(b) *Explosiv:* Die kinetische Energie nimmt zu: $T_A + T_B < T_C + T_D$.
(c) *Elastisch:* Die kinetische Energie bleibt erhalten: $T_A + T_B = T_C + T_D$.

Im Extremfall von Typ (a) kleben die beiden Teilchen zusammen, und es gibt in Wirklichkeit nur *ein* Objekt im Endzustand: $A + B \to C$. Im Extremfall von Typ (b) zerbricht ein einzelnes Objekt in zwei: $A \to C + D$ (in der Sprache der Teilchenphysik heißt das: A *zerfällt* in $C + D$).
Bei einem relativistischen Stoß *bleiben Energie und Impuls immer erhalten*. Mit anderen Worten: Keine der vier Komponenten des Energie-Impuls-Vierervektors ändert sich. Wie im klassischen Fall bleibt die *kinetische* Energie erhalten oder nicht.

Relativistische Stöße

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{1. } \text{Die Energie bleibt erhalten: } E_A + E_B = E_C + E_D.\\ \textbf{2. } \text{Der Impuls bleibt erhalten: } \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_C + \mathbf{p}_D.\end{array}\right\} \Longrightarrow p^\mu_A + p^\mu_B = p^\mu_C + p^\mu_D$$

3. Die kinetische Energie bleibt erhalten oder nicht.

Wir können die Stöße wieder in klebrig, explosiv oder elastisch einteilen, je nachdem, ob die kinetische Energie abnimmt, zunimmt oder gleichbleibt. Da die *Gesamtenergie* (Ruhe- plus kinetischer Energie) *immer* erhalten bleibt, folgt daraus, daß die Ruheenergie (und somit die Masse) bei einem klebrigen Stoß zunimmt, bei einem explosiven Stoß abnimmt und bei einem elastischen Stoß unverändert bleibt.

Stoßarten (relativistisch)

(a) *Klebrig:* Die kinetische Energie nimmt ab, Ruheenergie und Masse nehmen zu.

(b) *Explosiv:* Die kinetische Energie nimmt zu, Ruheenergie und Masse nehmen ab.

(c) *Elastisch:* Kinetische Energie, Ruheenergie und Masse bleiben erhalten.

Notabene: *Außer in elastischen Stößen ist Masse keine Erhaltungsgröße;** umgekehrt: wenn die (Gesamt-)Masse erhalten bleibt, ist der Stoß elastisch. Bei einem explosiven Stoß (oder einem Teilchenzerfall) wird Ruheenergie in kinetische Energie umgewandelt (oder, in der absurden Sprache der populärwissenschaftlichen Presse, die jeden in Rage bringt, der den leisesten Respekt für dimensionale Stimmigkeit hat: „Masse wird in Energie umgewandelt“).

Trotz einer gewissen strukturellen Parallele zwischen der klassischen und der relativistischen Analyse gibt es einen deutlichen Unterschied in der Interpretation inelastischer Stöße. Im klassischen Fall sagen wir, daß die kinetische Energie in eine „innere“ Form von Energie (Wärme, Federspannung etc.) umgewandelt wird oder umgekehrt. In der relativistischen Analyse sagen wir, daß kinetische Energie zu Ruheenergie wird oder umgekehrt. Wie kann das überhaupt zusammenpassen? Immerhin soll doch die relativistische Mechanik für $v \ll c$ in die klassische Mechanik übergehen. Die Antwort ist, daß alle „inneren“ Formen von Energie sich in der Ruheenergie eines Objektes widerspiegeln. Eine heiße Kartoffel *wiegt mehr* als eine kalte Kartoffel; eine gespannte Feder *wiegt mehr* als eine entspannte Feder. Auf der makroskopischen Ebene sind Ruheenergien bedeutend größer als innere Energien, so daß diese Massenunterschiede im täglichen Leben völlig vernachlässigbar und selbst bei atomaren Abmessungen sehr klein sind. Nur in der Kern- und Teilchenphysik sind typische innere Energien mit den typischen Ruheenergien vergleichbar. Nichtsdestoweniger, wann immer man ein Objekt wiegt, mißt man im Prinzip nicht nur die Massen der Teile, aus denen es besteht, sondern auch alle seine Wechselwirkungsenergien.

3.5 Beispiele und Anwendungen

Das Lösen von Problemen in der relativistischen Kinematik ist gleichsam eine Kunst und eine Wissenschaft für sich. Obwohl die involvierte *Physik* minimal ist – nichts außer der Erhaltung von Energie und Impuls –, kann die *Algebra* beträchtlich sein. Ob eine bestimmte Aufgabe zwei Zeilen oder sieben Seiten beansprucht, hängt ein gutes Stück davon ab, wie geschickt und erfahren man darin ist, die Werkzeuge und

*In der alten Terminologie würden wir sagen, daß die *relativistische* Masse erhalten ist, aber nicht die *Ruhe*masse.

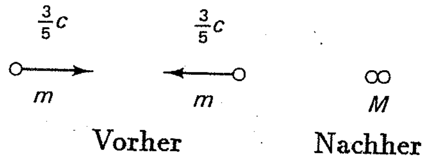

Abbildung 3.3: Ein klebriger Stoß zweier gleicher Massen (Beispiel 3.1).

Tricks des Gewerbes zu handhaben. Ich schlage vor, nun ein paar Beispiele durchzuarbeiten, wobei ich nebenher auf einige arbeitssparende Mittel hinweisen werde, die Ihnen zugänglich sind.[2]

Beispiel 3.1

Zwei Lehmklumpen, jeder mit Masse m und Geschwindigkeit $\frac{3}{5}c$, stoßen frontal aufeinander (Abb. 3.3). Sie bleiben zusammen kleben. Frage: Welche Masse M hat der zusammengesetzte Klumpen im Endzustand?

Lösung. Die Energieerhaltung besagt, daß $E_1 + E_2 = E_M$ ist. Die Impulserhaltung besagt, daß $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_M$ gilt. In diesem Fall ist die Impulserhaltung trivial: $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$, so daß der Klumpen des Endzustands ruht (was von vornherein offensichtlich war). Die Anfangsenergien sind gleich, und somit liefert die Energieerhaltung

$$Mc^2 = 2E_m = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-(3/5)^2}} = \frac{5}{4}(2mc^2)$$

Folgerung: $M = \frac{5}{2}m$. Beachten Sie, daß dies *größer* als die Summe der beiden Ausgangsmassen ist; in klebrigen Stößen wird kinetische Energie in Ruheenergie umgewandelt, so daß die Masse zunimmt.

Beispiel 3.2

Ein Teilchen mit Masse M, das anfangs ruht, zerfällt in zwei Teile von jeweils der Masse m (Abb. 3.4). Frage: Welche Geschwindigkeit hat jedes der wegfliegenden Teile?

Lösung. Dies ist natürlich das Gegenstück zu dem Prozeß aus Beispiel 3.1. Die Impulserhaltung ergibt lediglich, daß die zwei Klumpen mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzte Richtungen davonfliegen. Die Energieerhaltung erfordert, daß

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \text{und somit } v = c\sqrt{1-(2m/M)^2}$$

sein muß. Diese Antwort ergibt physikalisch nur einen Sinn, wenn M größer als $2m$ ist; es muß zumindest genügend Ruheenergie zur Verfügung stehen, um die

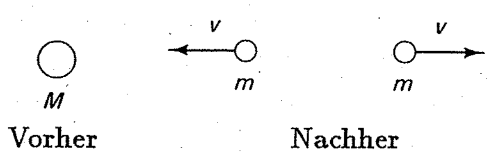

Abbildung 3.4: Ein Teilchen zerfällt in zwei gleiche Teile (Beispiel 3.2).

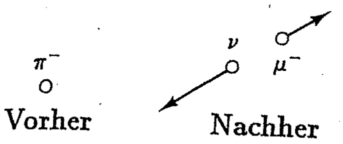

Abbildung 3.5: Zerfall eines geladenen Pions (Beispiel 3.3).

Ruheenergien des Endzustandes abzudecken (jeder *Überschuß* ist willkommen; er kann für kinetische Energie verwendet werden). Wir sagen, daß $M = 2m$ die Schwelle für den Prozeß $M \to 2m$ ist. Das Deuteron liegt beispielsweise unterhalb der Schwelle für den Zerfall in ein Proton und ein Neutron ($M_d = 1875,6$ MeV/c^2; $m_p + m_n = 1877,9$ MeV/c^2) und ist somit stabil. Ein Deuteron kann *gespalten* werden, aber nur, indem genügend Energie in das System gepumpt wird, um für die Differenz aufzukommen. (Sie mögen überrascht sein, daß ein gebundener Zustand von p und n *weniger* wiegen soll als die Summe seiner Teile; der Punkt ist, daß die Bindungsenergie des Deuterons, welche wie alle inneren Energien durch seine Ruhemasse wiedergegeben wird, *negativ* ist. In der Tat muß die Bindungsenergie für *jeden* stabilen Zustand negativ sein; wiegt das zusammengesetzte Teilchen *mehr* als die Summe der Konstituenten, wird es spontan zerfallen.)

Beispiel 3.3

Ein ruhendes Pion zerfällt in ein Myon und ein Neutrino (Abb. 3.5). Frage: Welche Geschwindigkeit hat das Myon?

Lösung. Die Energieerhaltung verlangt $E_\pi = E_\mu + E_\nu$. Die Impulserhaltung ergibt $\boldsymbol{p}_\pi = \boldsymbol{p}_\mu + \boldsymbol{p}_\nu$; aber $\boldsymbol{p}_\pi = 0$, so daß $\boldsymbol{p}_\mu = -\boldsymbol{p}_\nu$ ist. Somit fliegen Myon und Neutrino mit gleichen Impulsen, aber in entgegengesetzte Richtungen.

Um weiterzukommen, benötigen wir eine Formel, die die Beziehung der Energie eines Teilchens zu seinem Inpuls herstellt; Gleichung (3.42) ist dafür gerade richtig. [Sie könnten versucht gewesen sein, Gleichung (3.38) für die Geschwindigkeit zu lösen, um sie dann in Gleichung (3.40) einzusetzen. Aber das wäre eine sehr schlechte Strategie. Im allgemeinen ist die Geschwindigkeit für die Arbeit in der Relativitätstheorie eine ungeeignete Größe. Es ist besser, Gleichung (3.42) zu benutzen, die einen *direkt* zwischen E und $\boldsymbol{p}$ hin- und herbringt.]

Vorschlag 1. Um die Energie eines Teilchens zu erhalten, dessen Impuls Sie kennen, benutzen Sie die Invariante

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2 c^2 = m^2 c^4 \tag{3.49}$$

Für den vorliegenden Fall heißt das:

$$\begin{aligned} E_\pi &= m_\pi c^2 \\ E_\mu &= c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + \boldsymbol{p}_\mu^2} \\ E_\nu &= |\boldsymbol{p}_\nu| c = |\boldsymbol{p}_\mu| c \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Gleichung für die Energieerhaltung ein, erhalten wir

$$m_\pi c^2 = c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + \boldsymbol{p}_\mu^2} + |\boldsymbol{p}_\mu| c$$

oder

$$(m_\pi c - |\boldsymbol{p}_\mu|)^2 = m_\mu^2 c^2 + \boldsymbol{p}_\mu^2$$

Nach $|\boldsymbol{p}_\mu|$ aufgelöst, erhalten wir

$$|\boldsymbol{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c$$

Währenddessen ist die Energie des Myons [gemäß Gleichung (3.49)]

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2$$

Kennen wir erst einmal die Energie und den Impuls eines Teilchens, ist es einfach, seine Geschwindigkeit zu finden. Wenn $E = \gamma m c^2$ und $\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$ sind, ergibt die Division

$$\boldsymbol{p}/E = \boldsymbol{v}/c^2$$

Vorschlag 2. Wenn Sie die Energie und den Impuls eines Teilchens kennen und Sie seine Geschwindigkeit bestimmen wollen, benutzen Sie

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} c^2 / E \tag{3.50}$$

Die Antwort zu unserer Aufgabe ist demnach

$$v_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c$$

Die richtigen Massen eingesetzt, erhalten wir $v_\mu = 0{,}271c$.

Diese Rechnung ist durchaus richtig; sie nutzte zielgerichtet und systematisch die Erhaltungssätze. Aber ich möchte Ihnen jetzt einen schnelleren Weg zeigen, die Energie und den Impuls des Myons zu finden: unter Verwendung von Vierervektoren. [Ich sollte einen Exponenten μ an alle Vierervektoren schreiben, aber ich möchte nicht, daß Sie den Raumzeitindex μ mit dem Teilchenkürzel μ verwechseln, so daß ich hier, wie zukünftig noch oft, die Raumzeitindizes unterdrücken und einen Punkt benutzen werde, um das Skalarprodukt anzuzeigen.] Die Energie- und die Impulserhaltung bedingen

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu, \quad \text{oder } p_\nu = p_\pi - p_\mu$$

Nimmt man auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit sich selbst, erhält man

$$p_\nu^2 = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2p_\pi \cdot p_\mu$$

Aber:

$$p_\nu^2 = 0; \quad p_\pi^2 = m_\pi^2 c^2, \quad p_\mu^2 = m_\mu^2 c^2; \quad \text{und } p_\pi \cdot p_\mu = \frac{E_\pi}{c}\frac{E_\mu}{c} = m_\pi E_\mu$$

Daher gilt

$$0 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu$$

woraus man E_μ direkt erhält. Derselbe Ansatz ergibt

$$p_\mu = p_\pi - p_\nu$$

Quadrieren liefert

$$m_\mu^2 c^2 = m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi E_\nu$$

Aber $E_\nu = |\boldsymbol{p}_\nu|c = |\boldsymbol{p}_\mu|c$, so daß

$$2m_\pi |\boldsymbol{p}_\mu| = (m_\pi^2 - m_\mu^2)c$$

ist, woraus wir $|\boldsymbol{p}_\mu|$ erhalten. In diesem Fall war die Aufgabe einfach genug, so daß die Einsparungen durch die Viererverktorschreibweise mager sind, aber in komplizierteren Problemstellungen können die Vorteile beträchtlich sein.

Vorschlag 3. Benutzen Sie die Vierervektorschreibweise und nutzen Sie die Invarianz des Skalarproduktes aus.

Ein Grund dafür, warum die Benutzung von Invarianten in diesem Metier so bedeutsam ist, liegt darin, daß wir uns das Inertialsystem, in dem wir sie auswerten wollen, frei wählen können. Sehr oft ist das Laborsystem für die Rechnung nicht gerade vorteilhaft. In einem typischen Streuexperiment wird zum Beispiel ein Teilchenstrahl auf ein ruhendes Target geschossen. Die zu untersuchende Reaktion sei $p + p \to$ irgendetwas, aber im Laborsystem ist der Prozeß asymmetrisch, da ein Proton sich bewegt und das andere ruht. Kinematisch ist der Prozeß sehr viel einfacher, wenn man ihn in einem System betrachtet, in dem sich die beiden Protonen einander mit gleichen Geschwindigkeiten nähern. Wir nennen dies das Schwerpunktsystem*, weil in diesem System der Gesamtimpuls(-Dreiervektor) Null ist.

Beispiel 3.4

Das Bevatron in Berkeley wurde gebaut, um über die Reaktion $p + p \to p + p + p + \bar{p}$ Antiprotonen zu produzieren. Das heißt, ein hochenergetisches Proton trifft auf ein ruhendes und erzeugt (zusätzlich zu den bereits existierenden Teilchen) ein Proton-Antiproton-Paar. Frage: Wie groß ist die Schwellenenergie für die Reaktion (d.h., die minimal notwendige Energie des einlaufenden Protons)?

Lösung. Im Labor sieht der Prozeß wie in Abbildung 3.6a aus; im Schwerpunktsystem sieht er wie in Abbildung 3.6b aus. Wie lautet nun die Bedingung für die

*Häufig findet sich auch „CM-System“ für englisch *Center-of-Momentum System*. (Der Übersetzer)

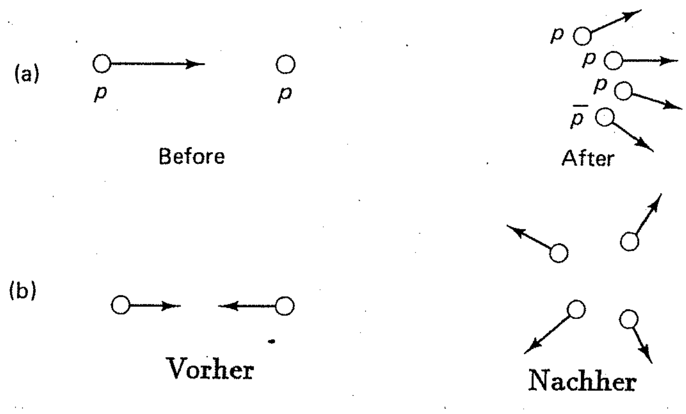

Abbildung 3.6: $p + p \to p + p + p + \bar{p}$. (a) Im Laborsystem; (b) im Schwerpunktsystem.

Schwellenenergie? Antwort: Sie muß gerade so groß sein, um die zwei zusätzlichen Teilchen zu erzeugen. Im Laborsystem ist schwer erkennbar, wie wir diese Bedingung formulieren würden, aber im Schwerpunktsystem ist es einfach: *Alle vier Teilchen im Endzustand müssen ruhen,* ohne daß Energie in Form von kinetischer Energie „verschwendet" wird. (Im Laborsystem ist das natürlich unmöglich, da die Impulserhaltung verlangt, daß es einen Rest an Bewegung gibt.)

Sei p^{μ}_{tot} der *gesamte* Energie-Impuls-Vierervektor im Laborsystem; da er erhalten bleibt, macht es keinen Unterschied, ob wir ihn vor oder nach der Kollision bestimmen. Wir wollen es *vorher* tun:

$$p^{\mu}_{tot} = \left(\frac{E + mc^2}{c}, |\boldsymbol{p}|, 0, 0\right)$$

worin E und $\boldsymbol{p}$ Energie und Impuls des einlaufenden Protons sind; m ist die Protonmasse. Sei $p^{\mu\prime}_{tot}$ der gesamte Energie-Impuls-Vierervektor im Schwerpunktsystem. Wieder können wir ihn vor und nach der Kollision bestimmen, dieses Mal machen wir es *nachher*:

$$p^{\mu\prime}_{tot} = (4mc, 0, 0, 0)$$

da (an der Schwelle) alle vier Teilchen ruhen. Nun ist ganz offensichtlich $p^{\mu}_{tot} \neq p^{\mu\prime}_{tot}$, aber die invarianten Produkte $p_{\mu tot}p^{\mu}_{tot}$ und $p'_{\mu tot}p^{\mu\prime}_{tot}$ *sind* gleich:

$$\left(\frac{E}{c} + mc\right)^2 - \boldsymbol{p}^2 = (4mc)^2$$

Indem wir die Standardbeziehung (3.49) benutzen, um $\boldsymbol{p}^2$ zu ersetzen, und nach E auflösen, erhalten wir

$$E = 7mc^2$$

Offensichtlich muß das einlaufende Proton eine kinetische Energie haben, die mindestens sechs Mal seiner Ruheenergie entspricht, damit dieser Prozeß stattfinden kann. (Und tatsächlich wurden die ersten Antiprotonen entdeckt, als die Maschine etwa 6000 MeV erreichte.)

Dies ist vielleicht ein gute Gelegenheit, den Unterschied zwischen einer *Erhaltungs-* und einer *invarianten* Größe zu betonen. Energie ist *erhalten* – derselbe Wert *nach* der Kollision wie *vorher* –, aber sie ist nicht invariant. Masse ist *invariant* – dieselbe in allen Inertialsystemen –, aber sie ist nicht erhalten. Einige Größen sind sowohl invariant als auch erhalten; viele sind weder noch. Wie Beispiel 3.4 andeutet, kann die geschickte Ausnutzung von Erhaltungs- und invarianten Größen eine Menge unschöner Algebra ersparen. Es beweist ebenso, daß einige Probleme im Schwerpunktsystem leichter zu lösen sind, wohingegen andere im Laborsystem leichter zu handhaben sein mögen.

> *Vorschlag 4.* Wenn sich ein Problem im Laborsystem als unhandlich erweist, versuchen Sie, es im Schwerpunktsystem zu lösen.

Selbst wenn man es mit etwas Komplizierterem als einer Kollision zweier identischer Teilchen zu tun hat, ist das Schwerpunktsystem (in dem $\boldsymbol{p}_{tot} = 0$) immer noch ein nützliches Bezugssystem, denn in diesem System ist die Impulserhaltung trivial: Null vorher, Null nachher. Aber Sie könnten sich fragen, ob es auch immer ein Schwerpunktsystem *gibt*. Oder in anderen Worten: Angenommen, wir hätten eine Teilchenschar mit Massen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ und Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots$, gibt es dann notwendigerweise ein Inertialsystem, in dem der gesamte Dreierimpuls Null ist? Die Antwort lautet *Ja*; ich werde das beweisen, indem ich die Geschwindigkeit dieses Bezugssystems finde und zeige, daß diese Geschwindigkeit kleiner als c ist. Gesamtenergie und -impuls im Laborsystem (S) sind

$$E_{tot} = \sum_i \gamma_i m_i c^2; \quad \boldsymbol{p}_{tot} = \sum_i \gamma_i m_i \boldsymbol{v}_i \tag{3.51}$$

Da p^μ_{tot} ein Vierervektor ist, können wir die Lorentztransformationen benutzen, um den Impuls im System S' zu finden, das sich mit der Geschwindigkeit v in die Richtung von $\boldsymbol{p}_{tot}$ bewegt:

$$|\boldsymbol{p}'_{tot}| = \gamma\left(|\boldsymbol{p}_{tot}| - \beta\frac{E_{tot}}{c}\right)$$

Dieser Impuls wird insbesondere zu *Null*, wenn v wie folgt gewählt wird

$$\frac{v}{c} = \frac{|\boldsymbol{p}_{tot}|c}{E_{tot}} = \frac{|\sum \gamma_i m_i \boldsymbol{v}_i|}{\sum \gamma_i m_i c}$$

Nun kann die Länge einer Summe von Dreiervektoren die Summe ihrer Längen niemals überschreiten (diese geometrisch offensichtliche Tatsache ist als *Dreiecksungleichung* bekannt), so daß gilt

$$\frac{v}{c} \leq \frac{\sum \gamma_i m_i (v_i/c)}{\sum \gamma_i m_i}$$

und da $v_i < c$ ist, können wir sicher sein, daß $v < c$ gilt.* Somit existiert das Schwerpunktsystem immer, und seine Geschwindigkeit bezogen auf das Laborsystem ist ge-

*Ich setze stillschweigend voraus, daß wenigstens eines der Teilchen massiv ist. Wenn *alle* von ihnen masselos sind, *können* wir $v = c$ erhalten, und in diesem Fall gibt es kein Schwerpunktsystem. Zum Beispiel gibt es kein Schwerpunktsystem für ein einzelnes Photon.

Abbildung 3.7:
Zwei experimentelle Anordnungen: (a) kollidierende Strahlen; (b) ruhendes Target.

geben durch

$$v_{CM} = \frac{p_{tot}c^2}{E_{tot}} \tag{3.52}$$

Wenn wir auf die Antwort zu Beispiel 3.4 zurückblicken, erscheint es sonderbar, daß es einer kinetischen Einschußenergie von *sechs mal* der Ruheenergie des Protons bedarf, um ein p-$\bar{p}$-Paar zu erzeugen. Schließlich erschaffen wir nur $2mc^2$ an neuer Ruheenergie. Dieses Beispiel illustriert die Ineffizienz der Streuung an ruhenden Targets; die Impulserhaltung zwingt uns, eine Menge Energie für kinetische Energie im Endzustand zu verschwenden. Hätten wir die zwei Protonen frontal aufeinander schießen können, wäre das Laborsystem selbst das Schwerpunktsystem gewesen und es hätte genügt, jedem Proton eine kinetische Energie von lediglich mc^2 mitzugeben, ein Sechstel dessen, was ein Festtarget-Experiment erfordert. Diese Erkenntnis führte in den frühen 70ern zu der Entwicklung sogenannter Speicherringe mit *gegeneinander umlaufenden* Strahlen (s. Abb. 3.7). Heute ist praktisch jede neue Maschine in der Hochenergiephysik ein solcher Speicherring.

Beispiel 3.5

Nehmen wir an, zwei gleiche Teilchen, jedes mit Masse m und kinetischer Energie T, kollidieren frontal. Frage: Wie groß ist ihre *relative* kinetische Energie T' (d.h., die kinetische Energie des einen im Ruhesystem des anderen)?

Lösung: Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, diese Aufgabe zu bearbeiten. Eine schnelle Methode ist, den Gesamt-Viererimpuls im Schwerpunkt- und im Laborsystem hinzuschreiben

$$p^{\mu}_{tot} = \left(\frac{2E}{c}, \mathbf{0}\right), \quad p^{\mu\prime}_{tot} = \left(\frac{E' + mc^2}{c}, \mathbf{p}'\right)$$

$(p_{tot})^2 = (p'_{tot})^2$ zu setzen:

$$\left(\frac{2E}{c}\right)^2 = \left(\frac{E' + mc^2}{c}\right)^2 - \mathbf{p}'^2$$

Gleichung (3.49) zu benutzen, um $\mathbf{p}'$ zu ersetzen

$$2E^2 = mc^2(E' + mc^2)$$

und die Antwort gemäß $T = E - mc^2$ und $T' = E' - mc^2$ auszudrücken

$$T' = 4T\left(1 + \frac{T}{2mc^2}\right) \tag{3.53}$$

Die *klassische* Antwort wäre $T' = 4T$ gewesen, was sich aus dem Ausdruck für $T \ll mc^2$ ergibt. (Im Ruhesystem von B hat A klassisch gesehen die doppelte

Geschwindigkeit und damit viermal soviel kinetische Energie als im Schwerpunktsystem.) Ein Faktor 4 ist sicher schon ein *gehöriger* Gewinn, aber der *relativistische* Zuwachs kann weitaus größer sein. Kollidierende Elektronen mit einer Laborenergie von 1 GeV würden beispielsweise eine *relative* kinetische Energie von 4000 GeV haben!

Literaturhinweise und Anmerkungen

1. Es gibt viele ausgezeichnete Lehrbücher zur speziellen Relativitätstheorie. Ich empfehle J.H. Smith, *Introduction to Special Relativity* (New York: Benjamin, 1967). Einen faszinierenden (aber unorthodoxen) Zugang bieten E.F. Taylor und J.A. Wheeler, *Spacetime Physics* (San Francisco: Freeman, 1966).
2. Wenn Sie tiefer in die Materie eindringen wollen, schlage ich R. Hagedorn, *Relativistic Kinematics* (New York: Benjamin, 1964) vor.