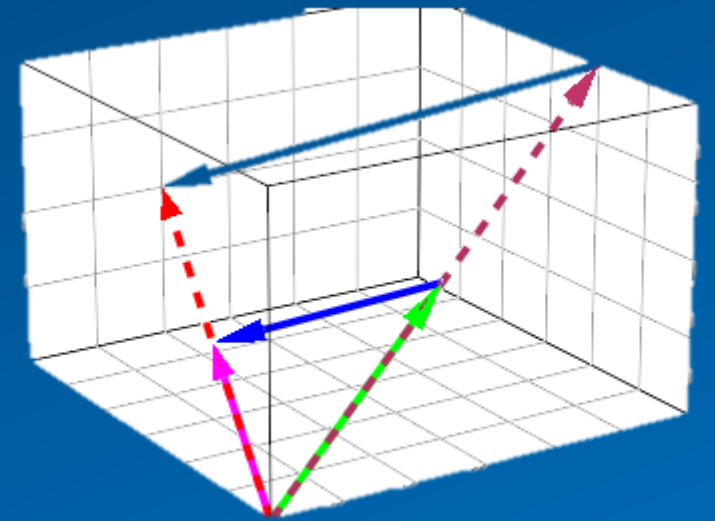
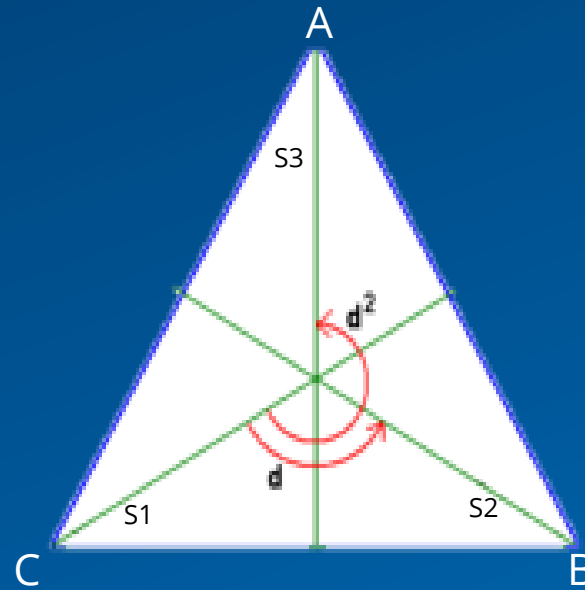
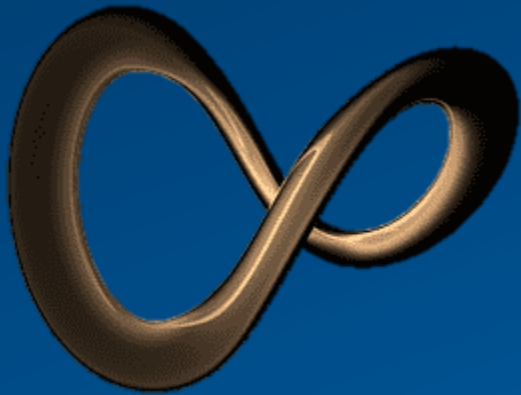


Ludwig Brandt
WL20- Kategorientheorie

Kategorientheorie

0. Motivation



=> keine Kategorisierung!

1. Kategorien - Definition und Beispiele

1.1 Definition – Kategorie

Eine Kategorie C besteht aus:

- einer Sammlung an Objekten $x, y, z, \dots$
- einer Sammlung an Morphismen $f, g, h, \dots$
- Kompositionsmorphismen:
- Identitätsmorphismen:

$$f: x \rightarrow y, g: y \rightarrow z \Rightarrow gf: x \rightarrow z$$

$$1_x: x \rightarrow x$$

Sodass für alle Morphismen $f: x \rightarrow y, g: y \rightarrow z, h: z \rightarrow w$ gilt:

- Identitäten sind links und rechtsneutral: $1_y f = f 1_x = f$
- Komposition ist assoziativ: $h(gf) = (hg)f = hgf$

Bemerkung: Die Objekte einer Kategorie stehen in bijektivem Verhältnis zu ihren Identitätsmorphismen.

Notation: $C(x, y) = \text{Hom}(x, y) = \{f, g, \dots \mid f, g, \dots: x \rightarrow y\}$

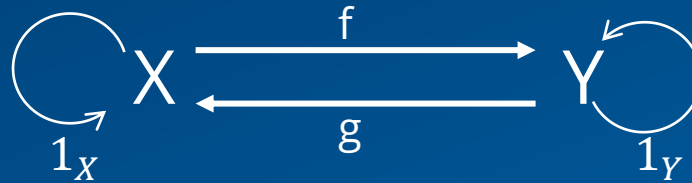
1. Kategorien - Definition und Beispiele

Kategorie	Set	„Gruppe“ BG	Group	Man
Objekte	Mengen	„Einzelobjekt“	Gruppen	glatte Mannigfaltigkeiten
Morphismen	Mengenfunktionen	Gruppenelemente	Gruppenhoms.	glatte Abbildungen
Neutrale Elemente	$\varphi: X \rightarrow X, \varphi = id_X$	$e \in G$	$\varphi: G \rightarrow G, \varphi = id_G$	$f: M \rightarrow M, f(x) = x$

1. Kategorien - Definition und Beispiele

1.2 Definition – Isomorphismus

Ein Morphismus $f: x \rightarrow y$, der ein Inverses $g: y \rightarrow x$ besitzt, sodass $fg = 1_y$ und $gf = 1_x$.



Ein Isomorphismus $f: z \rightarrow z$ heißt Automorphismus.

Kategorie	Set	Group	„Gruppe“ BG
Isomorphismen	Bijektive Abbildung	Bijektiver Gruppenhom.	Elemente

1.3 Definition – Gruppoid

Ein Gruppoid ist eine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist.

1. Kategorien - Definition und Beispiele

1.4 Definition – Unterkategorie

Eine Unterkategorie $D \subset C$ ist eine Sammlung von Objekten und Morphismen aus C , sodass alle Voraussetzungen aus Definition 1.1 erfüllt sind.

1.5 Lemma

Jede Kategorie C enthält einen maximalen Gruppoid, eine Unterkategorie $D \subset C$, die alle Objekte und alle (und nur diese) Isomorphismen enthält.

2. Dualität

2.1 Definition – „Gegenteilskategorie“

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, die Gegenteilskategorie $\mathcal{C}^{op}$ enthält:

- Dieselben Objekte wie $\mathcal{C}$
- Dieselben Morphismen, wobei Start und Ziel vertauscht sind $f^{op}: Y \rightarrow X \in \mathcal{C}^{op} \leftrightarrow f: X \rightarrow Y \in \mathcal{C}$
- Identitäts- und Kompositionsregeln bleiben erhalten

$$\begin{array}{ccc} f^{op}: Y \rightarrow X, g^{op}: Z \rightarrow Y \in \mathcal{C}^{op} & \leftrightarrow & f: \boxed{} \rightarrow \boxed{}, g: \boxed{} \rightarrow \boxed{} \in \mathcal{C} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ f^{op} g^{op}: \boxed{} \rightarrow \boxed{} \in \mathcal{C}^{op} & \leftrightarrow & \boxed{} \rightarrow \boxed{} \in \mathcal{C} \end{array}$$

2.2 Beispiel

Für $(\mathbb{R}, \leq)$ mit $f: x \rightarrow y$ genau dann, wenn $y \leq x$.

2. Dualität

2.2 Lemma

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i. $f: x \rightarrow y$ ist Isomorphismus
- ii. Für alle Objekte $c \in C$, definiert Linkskomposition mit f eine Bijektion: $f_*: C(c, x) \rightarrow C(c, y)$.
- iii. Für alle Objekte $c \in C$, definiert Rechtskomposition mit f eine Bijektion: $f^*: C(y, c) \rightarrow C(x, c)$.

2.3 Definition

Ein Morphismus $f: x \rightarrow y$ in einer Kategorie ist:

- Ein **Monomorphismus**, falls für $h, k: w \rightarrow x$ mit $fh = fk$ folgt, dass $h = k$ gilt.
- Ein **Epimorphismus**, falls für $h, k: y \rightarrow z$ mit $hf = kf$ folgt, dass $h = k$ gilt.

3. Funktor

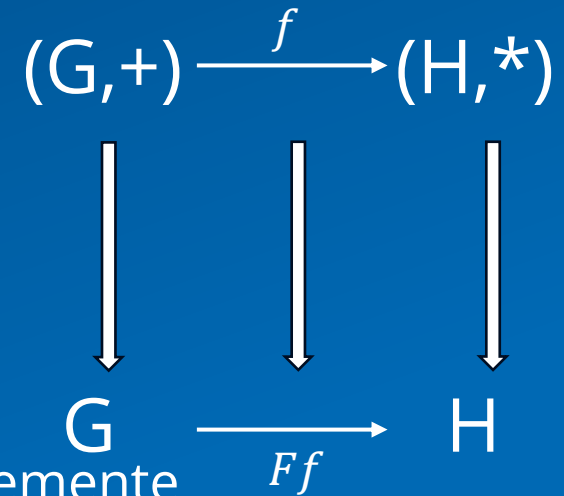
3.1 Definition - Funktor

Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwischen 2 Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ besteht aus:

- i. Einem Element $F_c \in \mathcal{D}$ für jedes $c \in \mathcal{C}$
- ii. Einem Morphismus $Ff: Fc \rightarrow Fc' \in \mathcal{D}$ für jeden Morphismus $f: c \rightarrow c' \in \mathcal{C}$, sodass $\text{Bild}(Ff) = Fc'$ und $\text{Domain}(Ff) = Fc$.

Sodass er die folgenden Axiome erfüllt:

- I. Für 2 kombinierbare Morphismen $f, g \in \mathcal{C}$ gilt $Ff * Fg = F(f * g)$
- II. Für jedes $c \in \mathcal{C}$ gilt $F(1_c) = 1_{Fc}$



3.2 Beispiel

Ein wichtiger Funktor ist der „**Vergiss-Funktor**“ U :

Für die Kategorie Group **vergisst** er die Gruppenstruktur und bildet die Gruppenelemente und Homomorphismen auf die unterliegenden Mengenelemente und Mengenabbildungen ab.

3. Funktoeren

Verbindet man Dualität und Funktoeren erhält man folgenden Begriff:

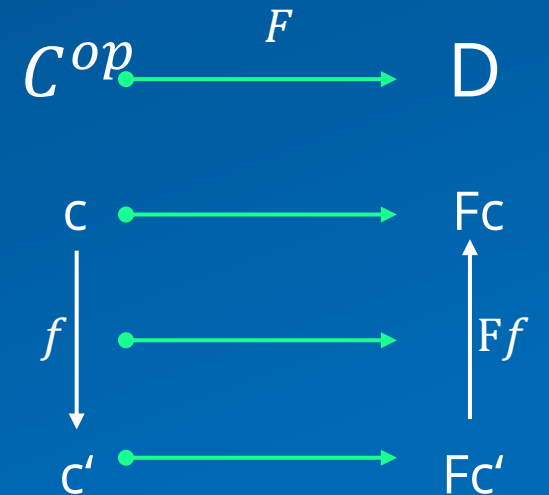
3.2 Definition – Kontravarianter Funktor

Ein Kontravarianter Funktor $F: C \rightarrow D$ ist ein Funktor $F: C^{op} \rightarrow D$ für den gilt:

- i. Einem Element $F_c \in D$ für jedes $c \in C$
- ii. Einem Morphismus $Ff: Fc' \rightarrow Fc \in D$ für jeden Morphismus $f: c \rightarrow c' \in C$, sodass $Bild(Ff) = Fc$ und $Domain(Ff) = Fc'$.

Sodass er die folgenden Axiome erfüllt:

- I. Für 2 komponierbare Morphismen $f, g \in C$ gilt $Ff * Fg = F(f * g)$
- II. Für jedes $c \in C$ gilt $F(1_c) = 1_{Fc}$



3.3 Lemma

Funktoeren erhalten Isomorphismen.

3. Funktoeren

3.4 Definition – Produkt-Kategorie

Für alle Kategorien C und D gibt es eine Kategorie $C \times D$, die Produkt-Kategorie, für die gilt:

- i. Die Objekte sind geordnete Paare (c, d) wobei c aus C und d aus D ,
- ii. Morphismen sind geordnete Paare $(f, g): (c, d) \rightarrow (c', d') \in C$, sodass '
 $f: c \rightarrow c' \in C$ und $g: d \rightarrow d' \in D$

Wobei Komposition und Identitäten analog komponentenweise definiert werden.

4. Natürlichkeit

4.1 Definition – Natürliche Transformation

Seien C und D zwei Kategorien mit Funktoren $F, G: C \rightarrow D$. **Eine natürliche Transformation** $\alpha: F \Rightarrow G$ besteht aus:

Einem Pfeil $\alpha_c: Fc \rightarrow Gc$ in D für jedes Objekt $c \in C$, deren Gesamtheit die **Komponenten** der natürlichen Transformation bilden, sodass das folgende Diagramm **kommutiert**:

