

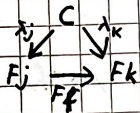
3.1 Limes und Kolimes als allgemeine Kegel

Def 3.1.1:

Für jedes Objekt $c \in C$ und jede Kategorie J schickt der konstante Funktor $c: J \rightarrow C$ jedes Objekt aus J auf c und jeden Morphismus in J auf den Identitätsmorphimus 1_c .

Def 3.1.2

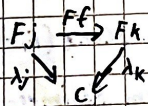
Ein Kegel über einem Diagramm $F: J \rightarrow C$ mit Hochpunkt $c \in C$ ist eine natürliche Transformation $\lambda: c \Rightarrow F$, deren Domain der konstante Funktor c ist. Die $(\lambda_j: c \rightarrow Fj)_{j \in J}$ werden Beine des Kegels genannt.



Eine Familie $(\lambda_j: c \rightarrow Fj)_{j \in J}$ definiert genau dann einen Kegel über F , wenn das Dreieck für jeden Morphismus $f: j \rightarrow k$ in J kommutiert.

Ein Kegel unter F mit Tiefpunkt c ist die natürliche Transformation

$\lambda: F \Rightarrow c$, deren Beine $(\lambda_j: Fj \rightarrow c)_{j \in J}$ sind.

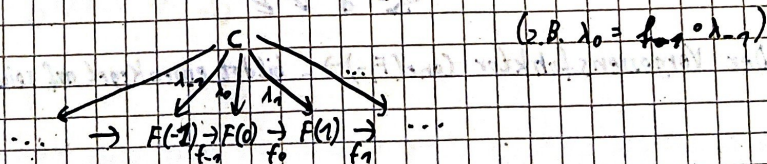


Auch hier muss das Dreieck für jeden Morphismus $f: j \rightarrow k$ kommutieren.

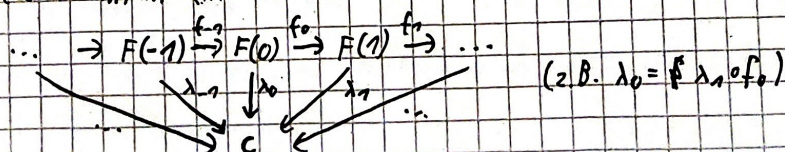
Kegel unter einem Diagramm werden auch Kokegel genannt und sind genau genommen Kegel über $F: J^{op} \rightarrow C^{op}$.

Angenommen F wird von ~~einer~~ ^{der} Poset-Kategorie $(\mathbb{Z}, \leq)$ indiziert.

Dann wird der Kegel über F durch $(\lambda_n: c \rightarrow F_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ so definiert, dass für jedes $n \leq m$ das Dreieck ~~Kommutiert~~ λ_n, λ_m und $F_n \rightarrow F_m$ kommutiert.



bzw. der Kegel unter F durch $(\lambda_n: F_n \rightarrow c)_{n \in \mathbb{Z}}$, sodass für $n \leq m$ das Dreieck λ_n, λ_m und $F_n \rightarrow F_m$ kommutiert

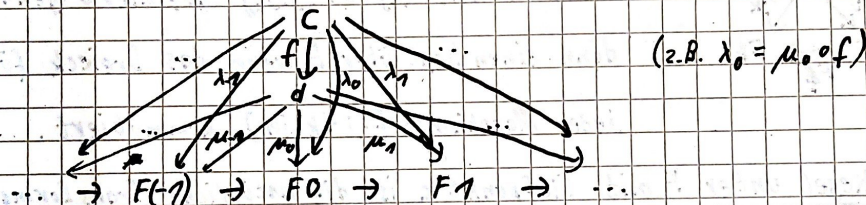


Wir bezeichnen den Limes von F als den allgemeinen Kegel über das Diagramm F , den Kolimes als den allg. Kegel unter F .

2

Def 3.1.3

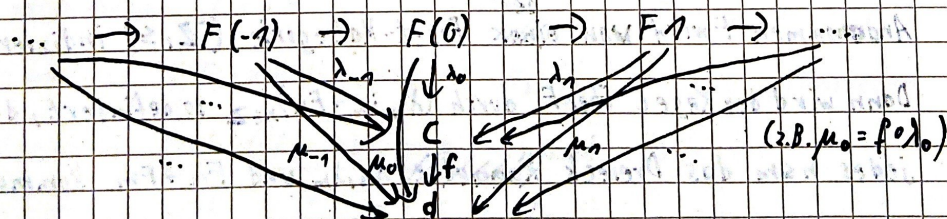
Für jedes Diagramm $F: J \rightarrow C$ ist der Limes ein terminales Objekt in der Kategorie der Kegel über F ($\text{Cone}(-, F)$). Ein Objekt dieser Kategorie ist ein Kegel über F mit einem HP. Die Daten eines terminalen Objekts bestehen aus einem Limes-Objekt und dem zugehörigen Limes-Kegel. Ein Morphismus von einem Kegel $\lambda: c \Rightarrow F$ zu einem Kegel $\mu: d \Rightarrow F$ ist ein Morphismus $f: c \rightarrow d$ in C , sodass für alle $j \in J$ $\mu_j \circ f = \lambda_j$ gilt.



Der Vergessens functor $\text{Cone}(-, F) \rightarrow C$ bildet ein Kegel auf seinen HP ab.

Ein Kolimes ist ein initiales Objekt (Ausgangsobjekt) in $\{ \text{Cone}(F, -) \}$.

Die Daten eines initialen Objekts bestehen aus einem Kolimes-Objekt und dem zugehörigen Kolimes-Kegel. Ein Morphismus von $\lambda: F \Rightarrow c$ zu $\mu: F \Rightarrow d$ ist ein Morphismus $f: c \rightarrow d$, sodass für alle $j \in J$ $\mu_j = f \circ \lambda_j$ gilt.



Der Vergessens functor $\text{Cone}(F, -) \rightarrow C$ bildet einen Kegel auf seinen TP ab.

Prop. 3.1.4 (Eindeutigkeit von Limes und Kolimes)

Seien $\lambda: \mathcal{L} \Rightarrow F$ und $\lambda': \mathcal{L}' \Rightarrow F$ zwei Limes-Kegel über einem gewöhnlichen Diagramm F . Dann existiert genau ein Isomorphismus $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}'$, der mit den Beinen der Limes-Kegel kommutiert.

Beweis:

Die Limes-Kegel $\lambda: \mathcal{L} \Rightarrow F$ und $\lambda': \mathcal{L}' \Rightarrow F$ definieren jeweils terminale Objekte. Nach Korollar 2.3.2 definiert das terminale Objekt in jeder Kategorie einen zusammenziehbaren Gruppoid. Das bedeutet, dass diese Objekte einzigartig isomorph sind, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Anmerkung: Dieses Ergebnis verbietet nicht, dass Limes-Objekte nicht-triviale Automorphismen besitzen. Wenn $\lambda: \mathcal{L} \Rightarrow F$ ein Limit-Kegel ist und $\sigma: \mathcal{L} \cong \mathcal{L}$ ein beliebiger Automorphismus von $\mathcal{L}$, dann ist $\lambda \sigma: \mathcal{L} \Rightarrow F$ ein anderer Limit-Kegel. Allerdings impliziert 3.1.4, dass der einzige passende Automorphismus die Identität ist.

Def 3.1.5:

Ein Produkt ist ein Limes eines Diagramms das von einer diskreten Kategorie indiziert wird und nur Identitätsmorphisme enthält. Ein Kegel über das Diagramm ist die Familie $(\lambda_j: c \Rightarrow F_j)_{j \in J}$ von Morphismen. Der Limes wird als $\prod_{j \in J} F_j$ und die Beine als $(\pi_k: \prod_{j \in J} F_j \rightarrow F_k)_{k \in J}$ geschrieben. Diese werden (Produkt)Projektionen genannt. Es gilt:

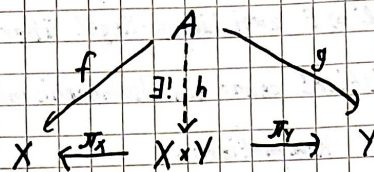
$$C(c, \prod_{j \in J} F_j) \xrightarrow[\cong]{(\pi_k)_k} \prod_{k \in J} C(c, F_k) \cong \text{Cone}(c, F)$$

Beispiel 3.1.6:

Das Produkt eines Paares der Räume X und Y ist $X \times Y$ mit den stetigen Abbildungen $X \xleftarrow{\pi_X} X \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$, für die gilt:

Für jeden anderen Raum A mit stetigen Abbildungen $f: A \rightarrow X$ und $g: A \rightarrow Y$ existiert genau eine Funktion $h: A \rightarrow X \times Y$, sodass das

Diagramm kommutiert.



Nehmen wir A als den Punkt, der den zugrundeliegenden Set-Funktor

$U: \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ darstellt. $\text{Top}(*, X \times Y) \cong \text{Top}(*, X) \times \text{Top}(*, Y)$

Diese Bijektion sagt uns, dass die Punkte in $X \times Y$ zu Punkten aus dem kartesischen Produkt von X und Y korrespondieren.

Nun müssen wir noch die Topologie auf $X \times Y$ definieren. Aufgrund der Universal-eigenschaft muss $X \times Y$ die größte Topologie auf dem kartesischen Produkt von X und Y sein, damit π_X und π_Y stetig sind.

Def 3.1.7:

Ein terminales Objekt ist ein trivialer Spezialfall eines Produktes, in dem die Index-Kategorie leer ist. Ein Kegel über einem leeren Diagramm ist nur ein Objekt in der Zielkategorie, dem HP , und dieser ist somit der Limes.

Beispiel 3.1.8:

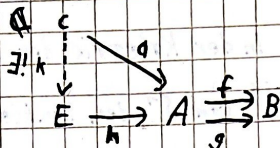
Die Kategorie $\mathbf{1}$ mit nur einem Objekt und nur Identitätsmorphismen ist ~~die~~ terminale Kategorie, das terminale Objekt von Cat .

Def 3.1.9:

Ein Equalizer ist der Grenzwert eines Diagramms, das von einem parallelen Paar, der Kategorie $\mathbf{2}$ mit zwei Objekten und zwei parallelen Nichtidentitätsmorphismen, indiziert wird. Das Diagramm ist ein Paar von Morphismen $f, g: A \rightrightarrows B$ in der Zielkategorie C . Ein Kegel über das Diagramm mit $HP\ c$ besteht aus den Morphismen $a: c \rightarrow A$ und $b: c \rightarrow B$, sodass $fa = b$ und $ga = b$. Das impliziert $fa = ga$. Der Equalizer $h: E \rightarrow A$ ist der allgemeine Pfeil mit dieser Eigenschaft.

$$E \xrightarrow{h} A \xrightleftharpoons[f]{g} B$$

Dieses Diagramm wird equalizer Diagramm genannt. Die Universalieigenschaft impliziert, dass es für jedes $a: C \rightarrow A$ das $fa=ga$ erfüllt ~~es~~ genau eine Faktorisierung $k: C \rightarrow E$ von a durch h gibt.

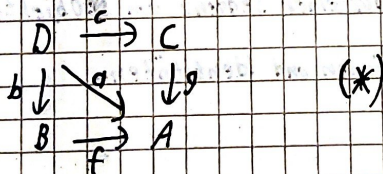


Beispiel 3.1.10

Sei $E = \mathbb{Z}$, $h(x) = 2\pi x$, $f(x) = \cos x$, $g(x) = |\sin(\frac{1}{2}x)| + 1$; dann kommutiert $\mathbb{Z} \xrightarrow{h} \mathbb{R} \xrightleftharpoons[f]{g} \{1\}$
 $\{ \dots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots \}$

Def 3.1.11

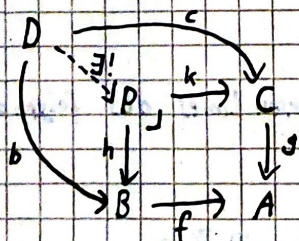
Ein Pullback ist ein Grenzwert eines Diagramms, das von einer Poset-Kategorie indiziert wird, die aus zwei Nichtidentitätsmorphismen f und g mit gleicher Codomain besteht. Ein Kegel mit HP D besteht aus drei Morphismen, sodass beide Dreiecke kommutieren.



Das Bein a impliziert dass $fb=gc$ gilt. Deshalb können wir den Kegel über $B \xrightarrow{f} A \xleftarrow{g} C$ als Paar von Morphismen $B \xleftarrow{b} D \xrightarrow{c} C$ schreiben, das ein kommutatives Quadrat beschreibt.

Der Pullback ist ein kommutatives Quadrat $fh=gk$ für das gilt:

Für jedes kommutative Quadrat (*) existiert genau eine Faktorisierung seiner Beine durch den HP des Pullback-Kegels:

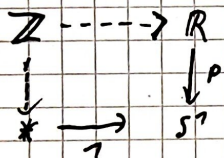


Das Symbol " $\sqsubset$ " zeigt an, dass das Quadrat $gk = fh$ ein Pullback ist.

Der Pullback wird auch Faserprodukt genannt und wird als $B \times_A C$ geschrieben.

Beispiel 3.1.12

Sei $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ die stetige Karte in der Kategorie der Räume die die reelle Zahl t auf den Punkt $e^{2\pi i t}$ von S^1 , dem komplexen Einheitskreis, abbildet. Dann ist der Pullback des Diagramms genau die Faser von p über den Punkt $1 \in S^1$, also jeder Punkt in $\mathbb{R}$ der durch p auf $1 \in S^1$ abgebildet wird. Das sind genau die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

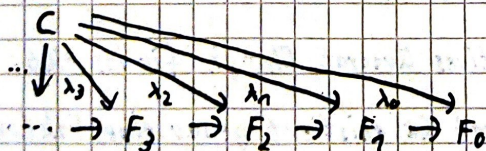


Def 3.1.13

Der Limes eines Diagramms, das von der Kategorie $\mathcal{C}^{op}$ indiziert wird, heißt Inverser Limes eines Turmes oder einer Sequenz von Morphismen. Ein von $\mathcal{C}^{op}$ indiziertes Diagramm besteht aus einer Sequenz von Objekten und Morphismen zusammen mit Kompositionen und Identitäten.

$$\dots \rightarrow F_3 \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0$$

Ein Kegel über diesem Diagramm ist eine Erweiterung der Daten zu einem Diagramm der Form $(\mathcal{C} + 1)^{op}$. Der Kegel besteht also aus einem neuen "ganz linken" Element mit Morphismen die jedes Dreieck kommutieren lassen.



Der Inverse Limes ist der terminale Kegel, auch als $\varprojlim F_n$ geschrieben.

Beispiel 3.1.14

Die p -adischen Zahlen werden über den Inversen Limes des folgenden Diagramms von Ringen definiert:

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}/p^3 \rightarrow \mathbb{Z}/p^2 \rightarrow \mathbb{Z}/p$$

Def. 3.1.15

7

Die folgenden Definitionen definieren die bekannten Definitionen
des Limes für den Kolimes:

Ein Koprodukt $\coprod_{j \in J} A_j$ ist der ~~Kolimit~~ Kolimes des Diagramms $(A_j)_{j \in J}$. Die
Beine des Kolimes-Kegels $\tau_{j_0} : A_{j_0} \rightarrow \coprod_{j \in J} A_j$ heißen Koprodukt-Injektionen.

Ein initiales Objekt ist der Kolimes eines leeren Diagramms.

Ein Koequalizer ist der Kolimes eines von der parallelen Paar Kategorie
 $\bullet \rightrightarrows \bullet$ indizierten Diagramms. Der Koequalizer von $f, g: A \rightrightarrows B$ ist die
allgemeine Karte $h: B \rightarrow C$ mit der Eigenschaft $hf = hg$. Der Kolimes-Kegel
wird Koequalizer Diagramm oder Gabel genannt.

$$A \begin{array}{c} f \\ \rightrightarrows \\ g \end{array} B \xrightarrow{h} C$$

Ein Pushout ist der Kolimes eines von der Poset-Kategorie $\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$
indizierten Diagramms. Das Symbol " $\ulcorner$ " zeigt an, dass es sich um einen
Pushout handelt. Der Pushout ist das allgemeine kommutierende Quadrat
unter den Karten f und g .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & \ulcorner & \downarrow k \\ C & \xrightarrow{h} & P \end{array}$$

~~Der Kolimes eines von der Ordinal ω indizierten Diagramms wird~~

Der Kolimes eines vom Ordinal ω indizierten Diagramms wird
sequentieller Kolimes oder direkter Limes genannt. Der Kolimes eines
Diagramms ~~der Form~~ auch $\varinjlim F_n$ geschrieben, definiert ein Diagramm der
Form $\omega + 1$.

$$F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3 \rightarrow \dots$$

Def 3.2.1

Ein Diagramm ist klein wenn seine Indexkategorie klein ist. Eine Kategorie C ist komplett wenn sie die Grenzwerte aller kleinen Diagramme in C enthält und kokomplett wenn sie die Kogrenzwerte aller kleinen Diagramme in C enthält.

Um zu überprüfen dass Set komplett ist benutzen wir ein kleines Diagramm

$F: J \rightarrow \text{Set}$ Ein Limes ist eine Repräsentation von:

$$\text{Set}(X, \lim F) \cong \text{Cone}(X, F)$$

Spezialisieren wir dies zu einer festen einelementrigen Menge, die den

Identitätsfunktork $\text{Set} \rightarrow \text{Set}$ repräsentiert, erhalten wir:

$$\lim F \cong \text{Set}(1, \lim F) \cong \text{Cone}(1, F)$$

Def 3.2.2

Für jedes kleine Diagramm $F: J \rightarrow \text{Set}$ definieren wir $\lim F := \text{Cone}(1, F)$

als die Menge der Kegel über F mit HP 1. Wir definieren die Beine des

Kegels als Funktionen $\lambda_j: \lim F \rightarrow F_j$, die folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{array}{ccc} \lim F & \xrightarrow{\lambda_j} & F_j \\ \mu: 1 \Rightarrow F & \mapsto & \mu_j: 1 \Rightarrow F_j \end{array}$$

Theorem 3.2.3

Die Kategorie Set ist komplett und enthält alle kleinen Grenzwerte

Bew.: Zuerst zeigen wir dass die oben definierten Funktionen einen Kegel

über F definieren, indem wir zeigen dass das Diagramm für jeden

Morphismus $f: j \rightarrow k$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} & \lim F & \\ \lambda_j \swarrow & & \searrow \lambda_k \\ F_j & \xrightarrow{f} & F_k \end{array}$$

Für jedes Element $\mu: 1 \Rightarrow F$ oder Menge $\lim F$ gilt

$$Ff(\lambda_j(\mu)) \stackrel{\text{def.}}{=} Ff(\mu_j) = \mu_k \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda_k(\mu)$$

und somit definieren die λ_j einen Kegel über F

Um nun zu zeigen dass $\lambda: \lim F \Rightarrow F$ der allgemeine Kegel ist, betrachten wir einen Kegel $\gamma: X \Rightarrow F$ ohne bestimmten HP. Wir müssen zeigen dass sich γ durch $\lambda: \lim F \Rightarrow F$ durch die Funktion $r: X \rightarrow \lim F$ darstellen lässt. Für jedes Element $x \in X$, bzw. Funktion $x: 1 \rightarrow X$, existiert ein Kegel $\gamma_x: 1 \Rightarrow F$. Wir definieren $r(x) \in \lim F = \text{Cone}(1, F)$ als diesen Kegel γ_x . Nach Definition der Beine des Kegels λ gilt $\lambda_j(r(x)) = \lambda_j(\gamma_x) = (\gamma_x)_j = \gamma_j x$, sodass sich γ ^{über} r durch λ eindeutig darstellen lassen kann. $\square$

Beispiel 3.2.4

Nach Theorem 3.2.3 ist das Produkt der Mengen A_j die Menge der Kegel mit HP 1. Der Kegel ist somit nur ein J -Tupel von Elementen aus den Mengen. Dadurch fällt das kategorische Produkt in Set mit dem gewöhnlichen kartesischen Produkt zusammen.

$$\prod_{j \in J} A_j := \{ (a_j)_{j \in J} \}$$

Beispiel 3.2.5

Seien $f, g: X \rightrightarrows Y$ ein paralleles Funktionenpaar, dann ist deren Equalizer die Menge der Karten für die $1 \rightrightarrows X$, $f x = g x$ gilt, bzw.

$$E := \{ x \in X \mid f(x) = g(x) \}$$

Beispiel 3.2.6

Die Elemente eines Pullbacks eines Funktionenpaares $B \xrightarrow{f} A \xleftarrow{g} C$ sind Kegel über dem Diagramm mit HP 1.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\epsilon} & C \\ b \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Die Daten eines solchen Kegels bestehen aus einem Elementepaar $b \in B$ und $c \in C$, sodass $f(b) = g(c)$ gilt. Also ist der Pullback definiert durch

$$B \times_A C := \{ (b, c) \in B \times C \mid f(b) = g(c) \}$$