

Aufgabe 1

Seien $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zweimal bzw. einmal stetig differenzierbar. Wir erklären den Gradienten, die Divergenz und den Laplace-Operator durch

$$\nabla f := \begin{bmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{bmatrix}, \quad \operatorname{div} F := \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2, \quad \Delta f := \operatorname{div} \nabla f := (\partial_1^2 + \partial_2^2)f.$$

Ferner definieren wir Polarkoordinaten $x = \Phi(r, \varphi)$ im $\mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} \Phi &: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \varphi) &\longmapsto r \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (i) Bestimmen Sie J_Φ und J_Φ^{-1} .
- (ii) Normieren Sie $\partial_r \Phi$ und $\partial_\varphi \Phi$ zu Einheitsvektoren e^r und e^φ .
- (iii) Bestimmen Sie ∇f , $\operatorname{div} F$ und Δf in Polarkoordinaten, d.h., zeigen Sie

$$\begin{aligned} (\nabla f) \circ \Phi &= \partial_r(f \circ \Phi)e^r + \frac{1}{r} \partial_\varphi(f \circ \Phi)e^\varphi, \\ (\operatorname{div} F) \circ \Phi &= \langle \partial_r(F \circ \Phi), e^r \rangle + \frac{1}{r} \langle \partial_\varphi(F \circ \Phi), e^\varphi \rangle, \\ (\Delta f) \circ \Phi &= \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \right) (f \circ \Phi). \end{aligned}$$

- (iv) Bestimmen Sie $\nabla(f \circ \Phi)$ in kartesischen Koordinaten.

Aufgabe 2

Wie Aufgabe 1 nur im $\mathbb{R}^3$, dh., mit Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \Phi &: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, \theta) &\longmapsto r \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$\Delta u = 0$$

für zweimal stetig differenzierbare $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ der Gestalt $u \circ \Phi(r, \varphi, \theta) = U(r)$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten

$$\int_{\Omega} f(x) dx$$

für

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x|^2 < 2, x_1 > 0\} \quad \text{und} \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}},$$

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_2 > 0\} \quad \text{und} \quad f(x) := \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 < |\xi|^2\} \quad \text{und} \quad f(x) := |x|^2$$

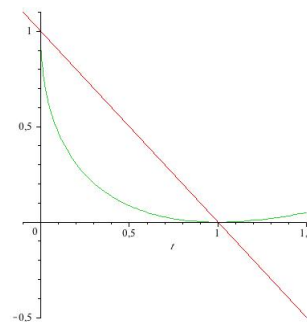
mit $R > 0$ und $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Omega} 7x_1 x_2^2 dx,$$

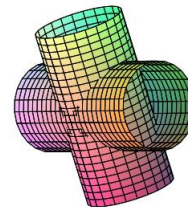
wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ im ersten Quadranten zwischen $x_1 + x_2 = 1$ und $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1$ liegt.



Aufgabe 6

Bestimmen Sie das Volumen des Durchschnitts der beiden Zylinder Z_2 und Z_3 , wobei für $n \in \{1, 2, 3\}$

$$Z_n := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 - x_n^2 < 1\}.$$



Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Schwerpunkt s des Einheitstetraeders

$$T := \{x \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 < 1\},$$

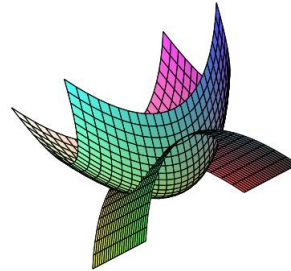
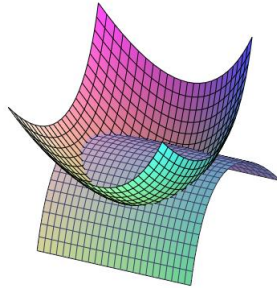
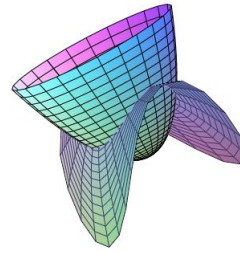
d.h., mit $|T| := \int_T 1 dx$ den Vektor

$$s := \frac{1}{|T|} \int_T x dx = \frac{1}{|T|} \begin{bmatrix} \int_T x_1 dx \\ \int_T x_2 dx \\ \int_T x_3 dx \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 8

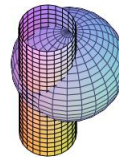
Berechnen Sie das Volumen des Bereichs zwischen dem parabolischen Zylinder Z und dem elliptischen Paraboloid P mit

$$Z := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 4 - x_2^2\},$$
$$P := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 2x_1^2 + x_2^2\}.$$



Aufgabe 9

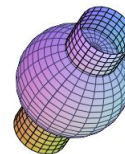
Aus einer Kugel mit Radius $R > 0$ wird ein zylindrisches Loch mit Radius $R/2$ so ausgebohrt, daß der Kugelmittelpunkt auf dem Rand des Bohrlochs liegt. Welches Volumen bleibt übrig?



Aufgabe 10

Aus einer Kugel mit Radius $R > 0$ wird ein zylindrisches Loch mit Radius $r < R$ so ausgebohrt, daß die Bohrachse durch den Kugelmittelpunkt verläuft. Welches Restvolumen bleibt übrig? Welches Trägheitsmoment T hat der Bohrkern B bei Drehung um die Bohrachse, d.h., z.B.

$$T := \int_B (x_1^2 + x_2^2) dx = ?$$



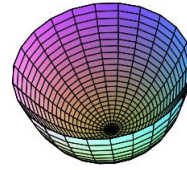
Aufgabe 11

Berechnen Sie die Trägheitsmomente T_n von

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 < x_3 < x_1^2 + x_2^2\}$$

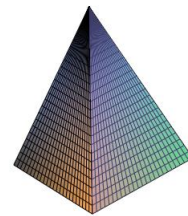
bei Drehung um die Koordinatenachsen, d.h., für $n = 1, 2, 3$

$$T_n := \int_{\Omega} (|x|^2 - x_n^2) dx.$$



Aufgabe 12

Eine Pyramide P soll die Höhe $h > 0$ und als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $\ell > 0$ haben. Skizze! Geben Sie eine (möglichst einfache) Beschreibung von P als Punktmenge des $\mathbb{R}^3$ an. Berechnen Sie sodann das Volumen und den Schwerpunkt der Pyramide P .



- Vortrag 1: Aufgabe 1, Aufgabe 2, Aufgabe 3
(Tim Vogel)
- ~~Vortrag 2: Aufgabe 4, Aufgabe 5~~
- Vortrag 3: Aufgabe 6, Aufgabe 7
(Linell Dehne)
- Vortrag 4: Aufgabe 8
(Jonathan Linz)
- Vortrag 5: Aufgabe 9, Aufgabe 10
(Anna Pauline Konrad)
- Vortrag 6: Aufgabe 11
(Gwenda Roselene Rode)
- Vortrag 7: Aufgabe 12
(Lisa-Marie Meixner)

Mathematik für Chemiker II

7. Übung im SS 2010

Lösungen der Hausaufgaben bis
DIENSTAG, 22. JUNI,
in den Kasten vor dem Dekanat der Mathematik einwerfen!

Aufgabe G1

Bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche, und berechnen Sie alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung zwei von:

(i) $e(x, y) := 13x - 5y$

(ii) $f(u, v) := u^2 - 4uv + 4v^2 + 33u - v$

(iii) $g(\alpha, \beta) := \sin(3\alpha - 4\beta^3 + 1)$

(iv) $h(r, s) := r^2 s \exp(\sin(s^2)) \ln(r/s)$

Aufgabe G2

Kann eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f die partiellen Ableitungen

$$\partial_s f(s, t) = 10st - t^2, \quad \partial_t f(s, t) = \sin(st) - 2st$$

besitzen?

Aufgabe G3

Seien $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(x(t), y(t)) = c$ konstant. Zeigen Sie

$$\nabla f(x(t), y(t)) \perp \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

Aufgabe G4

Seien $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zweimal bzw. einmal stetig differenzierbar. Wir erklären den Gradienten, die Divergenz und den Laplace-Operator durch

$$\nabla f := \begin{bmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{bmatrix}, \quad \operatorname{div} F := \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2, \quad \Delta f := \operatorname{div} \nabla f := (\partial_1^2 + \partial_2^2)f.$$

Ferner definieren wir Polarkoordinaten $x = \Phi(r, \varphi)$ im $\mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} \Phi &: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \varphi) &\longmapsto r \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (i) Bestimmen Sie J_Φ und J_Φ^{-1} .
- (ii) Normieren Sie $\partial_r \Phi$ und $\partial_\varphi \Phi$ zu Einheitsvektoren e^r und e^φ .
- (iii) Bestimmen Sie ∇f , $\operatorname{div} F$ und Δf in Polarkoordinaten, d.h., zeigen Sie

$$\begin{aligned} (\nabla f) \circ \Phi &= \partial_r(f \circ \Phi)e^r + \frac{1}{r}\partial_\varphi(f \circ \Phi)e^\varphi, \\ (\operatorname{div} F) \circ \Phi &= \langle \partial_r(F \circ \Phi), e^r \rangle + \frac{1}{r}\langle \partial_\varphi(F \circ \Phi), e^\varphi \rangle, \\ (\Delta f) \circ \Phi &= \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\right)(f \circ \Phi). \end{aligned}$$

- (iv) Bestimmen Sie $\nabla(f \circ \Phi)$ in kartesischen Koordinaten.

Aufgabe H1

(10 Punkte)

Es seien $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$u(x, y) := -\exp(-x) \cos(y) + 2y, \quad v(x, y) := \exp(-x) \sin(y) - 2x$$

gegeben. Gelten $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_x v = -\partial_y u$? Berechnen Sie Δu und Δv .

Aufgabe H2

(10 Punkte)

Lösen Sie die van der Waalsche Gleichung $RT = (p + a/V^2)(V - b)$ nach den Variablen $T = T(p, V)$ und $p = p(T, V)$ auf, und bestimmen Sie $\partial_p T$, $\partial_V T$ sowie $\partial_T p$, $\partial_V p$.

Aufgabe H3

(10 Punkte)

Wie Aufgabe G4 nur im $\mathbb{R}^3$, dh., mit Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, \theta) &\longmapsto r \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe H4

(10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$\Delta u = 0$$

für zweimal stetig differenzierbare $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ der Gestalt $u \circ \Phi(r, \varphi, \theta) = U(r)$.

Aufgabe H5

(10 Punkte)

Seien $x_1, x_2, x_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $|x(t)|^2 = r^2$ konstant. Zeigen Sie $x(t) \perp x'(t)$.

Gr 4

$$(i) \quad J_\phi(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$J_\phi^{-1}(r, \varphi) = r^{-1} \begin{bmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$(ii) \quad \partial_r \phi(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} =: e^r$$

$$\partial_\varphi \phi(r, \varphi) = r \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} =: r e^\varphi$$

$$(iii) \quad \nabla f \circ \phi = [\partial_u f \circ \phi]_u$$

$$= [\partial_u (f \circ \phi \circ \phi^{-1}) \circ \phi]_u$$

ketten-
regel

$$\xrightarrow{\quad} = \left[\sum_{k=1}^2 \partial_{u_k} (f \circ \phi) \cdot \partial_u \phi_k^{-1} \circ \phi \right]_u$$

$$= [J_\phi^{-t} \circ \phi \nabla (f \circ \phi)]_u$$

$$= J_\phi^{-t} \nabla (f \circ \phi) \quad (*)$$

$$= r^{-1} \begin{bmatrix} r \cos \varphi & -\sin \varphi \\ r \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \nabla (f \circ \phi)$$

$$= r^{-1} \begin{bmatrix} r \cos \varphi \partial_r (f \circ \phi) - \sin \varphi \partial_\varphi (f \circ \phi) \\ r \sin \varphi \partial_r (f \circ \phi) + \cos \varphi \partial_\varphi (f \circ \phi) \end{bmatrix}$$

$$= \partial_r (f \circ \phi) e^r + r^{-1} \partial_\varphi (f \circ \phi) e^\varphi$$

oder etwas kürzer

$$\partial_r (f \circ \phi) = \partial_u f \circ \phi \cdot \partial_r \phi_u = \langle \nabla (f \circ \phi), \partial_r \phi \rangle$$

$$\partial_\varphi (f \circ \phi) = \partial_u f \circ \phi \cdot \partial_\varphi \phi_u = \langle \nabla (f \circ \phi), \partial_\varphi \phi \rangle$$

$$\Rightarrow \nabla (f \circ \phi) = J_\phi^{-t} \cdot \nabla f \circ \phi$$

$$\Rightarrow \nabla f \circ \phi = J_\phi^{-t} \nabla (f \circ \phi) \quad (*)$$

(iv)

$$\nabla(f \circ \phi) = J_{\phi}^{-t} \nabla(f \circ \phi) \leftarrow \text{siehe (iii)}$$

(3)

$$\Rightarrow \nabla(f \circ \phi) = J_{\phi}^t (\nabla f \circ \phi)$$

$$\Rightarrow \nabla(f \circ \phi) \circ \phi^{-1} = J_{\phi}^t \circ \phi^{-1} \nabla f$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \circ \phi^{-1} \nabla f$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x_1}{|x|} & \frac{x_2}{|x|} \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix} \nabla f$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x_1}{|x|} \partial_1 f + \frac{x_2}{|x|} \partial_2 f \\ -x_2 \partial_1 f + x_1 \partial_2 f \end{bmatrix}$$

$$= \partial_1 f \begin{bmatrix} x_1/|x| \\ -x_2 \end{bmatrix} + \partial_2 f \begin{bmatrix} x_2/|x| \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{oder} = \begin{bmatrix} \langle x^{-1}, \nabla f \rangle \\ x \wedge \nabla f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla f \\ x \wedge \nabla f \end{bmatrix}$$

analog in $\mathbb{R}^3$ 

Lösungsvorschlag zur
7. Übung

Essen, 22.06.10

①

H1

$$\left. \begin{aligned} \partial_x u &= \exp(-x) \cos y = -u \\ \partial_y v &= \exp(-x) \cos y = -u \end{aligned} \right\} \Rightarrow \partial_x u = \partial_y v$$
$$\left. \begin{aligned} \partial_x v &= -\exp(-x) \sin y - 2 \\ \partial_y u &= \exp(-x) \sin y + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \partial_x v = -\partial_y u$$

$$\Rightarrow \Delta u = (\partial_x^2 + \partial_y^2) u = \partial_x \underbrace{\partial_x u}_{=\partial_y v} + \partial_y \underbrace{\partial_y u}_{=-\partial_x v} = 0$$

↗ Satz von Schwarz
↘

$$\Delta v = (\partial_x^2 + \partial_y^2) v = \partial_x \underbrace{\partial_x v}_{=-\partial_y u} + \partial_y \underbrace{\partial_y v}_{=\partial_x u} = 0$$

H2

$$T = T(p, v) = \frac{1}{R} \left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b)$$

$$p = p(T, v) = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

$$\Rightarrow \partial_p T = \frac{v-b}{R}$$

$$\partial_v T = \frac{1}{R} \left(p + \frac{a}{v^2} \right) - 2 \frac{v-b}{R} \frac{a}{v^3}$$

$$\partial_T p = \frac{R}{v-b}$$

$$\partial_v p = - \frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{a}{v^3}$$

(13)

(2)

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \nabla \phi(r, \varphi, \Theta) &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \Theta & -r \sin \varphi \cos \Theta & -r \cos \varphi \sin \Theta \\ \sin \varphi \cos \Theta & r \cos \varphi \cos \Theta & -r \sin \varphi \sin \Theta \\ \sin \Theta & 0 & r \cos \Theta \end{bmatrix} \\
 \wedge (ii) \quad &= \underbrace{\quad}_{= \partial_r \phi} \quad \underbrace{\quad}_{= \partial_\varphi \phi} \quad \underbrace{\quad}_{= \partial_\Theta \phi} \\
 &= r e^r \quad = r \cos \Theta \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad = r \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \Theta \\ \sin \varphi \sin \Theta \\ \cos \Theta \end{bmatrix} \\
 &= r \cos \Theta e^\varphi \quad = r e^\Theta
 \end{aligned}$$

Dann sieht $|e^r| = |e^\varphi| = |e^\Theta| = 1$ und

$e^r \perp e^\varphi$, $e^r \perp e^\Theta$, $e^\varphi \perp e^\Theta$, d.h.,

$\{e^r, e^\varphi, e^\Theta\}$ bildet ein ONS (Orthonormalsystem).

Dann gilt

$$\nabla \phi = [e^r \quad r \cos \Theta e^\varphi \quad r e^\Theta],$$

also

$$\nabla \phi^t = \begin{bmatrix} (e^r)^t \\ r \cos \Theta (e^\varphi)^t \\ r (e^\Theta)^t \end{bmatrix}.$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}
 \nabla \phi^t \nabla \phi &= \begin{bmatrix} |e^r|^2 & r \cos \Theta \langle e^r, e^\varphi \rangle & r \langle e^r, e^\Theta \rangle \\ r \cos \Theta \langle e^\varphi, e^r \rangle & r^2 \cos^2 \Theta |e^\varphi|^2 & r^2 \cos \Theta \langle e^\varphi, e^\Theta \rangle \\ r \langle e^\Theta, e^r \rangle & r^2 \cos \Theta \langle e^\Theta, e^\varphi \rangle & r^2 |e^\Theta|^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 \Theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

d.h.,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 \Theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix} \nabla \phi^t \nabla \phi = \text{id}.$$

Wir erhalten schließlich

$$\nabla \phi^r = \begin{bmatrix} (e^r)^t \\ r^{-1} \cos \Theta (e^\varphi)^t \\ r^{-1} (e^\Theta)^t \end{bmatrix}$$

oder ausgeschrieben

3

$$J_d^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \Theta & \sin \varphi \cos \Theta & \sin \Theta \\ -r^{-1} \frac{\sin \varphi}{\cos \Theta} & r^{-1} \frac{\cos \varphi}{\cos \Theta} & 0 \\ -r^{-1} \sin \varphi \sin \Theta & -r^{-1} \sin \varphi \sin \Theta & r^{-1} \cos \Theta \end{bmatrix}$$

(iii) $\partial_u f \circ \phi = \partial_u (f \circ d \circ d^{-1}) \circ \phi$

ketten-
regel $\rightarrow \sum_{u=1}^3 \partial_u (f \circ \phi) \cdot \partial_u d_u^{-1} \circ \phi$

$$= \begin{bmatrix} J_{\phi}^t \circ \phi & \nabla(f \circ \phi) \end{bmatrix}_u$$

Satz von
der Umkehr-
funktion $\rightarrow = \begin{bmatrix} J_d^{-t} & \nabla(f \circ \phi) \end{bmatrix}_u$

$$\Rightarrow \nabla f \circ d = J_d^{-t} \nabla(f \circ \phi)$$

Als:

$$\begin{aligned} \nabla f \circ d &\stackrel{(i)}{=} \begin{bmatrix} e^r & r^{-1} \omega^{\theta} e^{\varphi} & r^{-1} e^{\Theta} \end{bmatrix} \nabla(f \circ d) \\ &= \partial_r (f \circ d) e^r + r^{-1} \omega^{\theta} \partial_{\varphi} (f \circ d) e^{\varphi} + r^{-1} \partial_{\Theta} (f \circ d) e^{\Theta} \\ &= \partial_r (f \circ d) e^r + \underbrace{\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\cos \Theta} \partial_{\varphi} (f \circ d) e^{\varphi} + \partial_{\Theta} (f \circ d) e^{\Theta} \right)}_{=: \nabla_{\varphi, \Theta} (f \circ \phi)} \end{aligned}$$

"Gradient auf der
Einheitskugel S^2 "

Alternativ:

$$\partial_r (f \circ d) = \partial_u f \circ d \partial_u d_u = \langle \nabla f \circ d, \partial_r d \rangle$$

und analog

$$\partial_{\varphi} (f \circ d) = \langle \nabla f \circ d, \partial_{\varphi} d \rangle$$

$$\partial_{\Theta} (f \circ d) = \langle \nabla f \circ d, \partial_{\Theta} d \rangle$$

$$\Rightarrow \nabla(f \circ \phi) = \begin{bmatrix} \partial_r d^t \\ \partial_{\varphi} d^t \\ \partial_{\Theta} d^t \end{bmatrix} \nabla f \circ d = J_d^t \nabla f \circ \phi$$

$$\Rightarrow \nabla f \circ d = J_d^{-t} \nabla(f \circ \phi)$$

Dann weiter wie oben.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} \circ d &= \partial_1 \vec{F}_1 \circ d + \partial_2 \vec{F}_2 \circ d + \partial_3 \vec{F}_3 \circ d \\ &= \sum_{u=1}^3 \partial_u \vec{F}_u \circ d \end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned} \partial_u \vec{F}_u \circ d \quad \substack{\text{von ③,} \\ \vec{F} = \vec{F}_u} \rightarrow &= \sum_{u=1}^3 \partial_r (\vec{F}_u \circ d) e^r + r^{-1} \omega^{-1} \partial_\varphi (\vec{F}_u \circ d) e^\varphi \\ &\quad + r^{-1} \partial_\theta (\vec{F}_u \circ d) e^\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle \partial_r (\vec{F} \circ d), e^r \rangle + r^{-1} \omega^{-1} \langle \partial_\varphi (\vec{F} \circ d), e^\varphi \rangle \\ &\quad + r^{-1} \langle \partial_\theta (\vec{F} \circ d), e^\theta \rangle \end{aligned}$$

$$\Downarrow \Delta = \operatorname{div} \nabla$$

$$\Delta f \circ d = \operatorname{div} \nabla f \circ d$$

$$\begin{aligned} &= \langle \partial_r (\nabla f \circ d), e^r \rangle + r^{-1} \omega^{-1} \langle \partial_\varphi (\nabla f \circ d), e^\varphi \rangle \\ &\quad + r^{-1} \langle \partial_\theta (\nabla f \circ d), e^\theta \rangle \end{aligned}$$

$$\nabla f \circ d$$

$$\begin{aligned} \rightarrow &= \langle \partial_r (\partial_r (f \circ d) e^r + r^{-1} \omega^{-1} \partial_\varphi (f \circ d) e^\varphi + r^{-1} \partial_\theta (f \circ d) e^\theta), e^r \rangle \\ &\quad + r^{-1} \omega^{-1} \langle \partial_\varphi (\partial_r (f \circ d) e^r + r^{-1} \omega^{-1} \partial_\varphi (f \circ d) e^\varphi + r^{-1} \partial_\theta (f \circ d) e^\theta), e^\varphi \rangle \\ &\quad + r^{-1} \langle \partial_\theta (\partial_r (f \circ d) e^r + r^{-1} \omega^{-1} \partial_\varphi (f \circ d) e^\varphi + r^{-1} \partial_\theta (f \circ d) e^\theta), e^\theta \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\partial_r^2 (f \circ d) \langle e^r, e^r \rangle}_{= |e^r|^2 = 1} + \underbrace{\partial_r (f \circ d) \langle \partial_r e^r, e^r \rangle}_{= 0} \end{aligned}$$

$$+ \underbrace{\partial_r (r^{-1} \omega^{-1} \partial_\varphi (f \circ d)) \langle e^\varphi, e^r \rangle}_{= 0} + r^{-1} \omega^{-1} \partial_\varphi (f \circ d) \underbrace{\langle \partial_r e^\varphi, e^r \rangle}_{= 0}$$

$$+ \underbrace{\partial_r (r^{-1} \partial_\theta (f \circ d)) \langle e^\theta, e^r \rangle}_{= 0} + r^{-1} \partial_\theta (f \circ d) \underbrace{\langle \partial_r e^\theta, e^r \rangle}_{= 0}$$

$$\begin{aligned} &+ r^{-1} \omega^{-1} \left(\underbrace{\partial_\varphi \partial_r (f \circ d) \langle e^r, e^\varphi \rangle}_{= 0} + \underbrace{\partial_r (f \circ d) \langle \partial_\varphi e^r, e^\varphi \rangle}_{= \cos \theta e^\varphi} \right) \\ &\quad = \cos \theta |e^\varphi|^2 = \cos \theta \end{aligned}$$

$$+ r^{-1} \omega^{-1} \partial_\varphi^2 (f \circ d) \underbrace{\langle e^\varphi, e^\varphi \rangle}_{= |e^\varphi|^2 = 1} + r^{-1} \omega^{-1} \partial_\varphi (f \circ d) \underbrace{\langle \partial_\varphi e^\varphi, e^\varphi \rangle}_{= 0}$$

$$\begin{aligned} &\quad = \underbrace{- \left\langle \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, e^\varphi \right\rangle}_{= 0} \end{aligned}$$

$$+ r^{-1} \partial_\theta \partial_\varphi (f \circ d) \underbrace{\langle e^\theta, e^\varphi \rangle}_{=0}$$

(5)

$$+ r^{-1} \partial_\theta (f \circ d) \underbrace{\langle \partial_\varphi e^\theta, e^\varphi \rangle}_{=0}$$

$$= -\sin\theta \left[\frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi} \right] = -\sin\theta e^\varphi$$

$$\underbrace{\quad}_{= -\sin\theta |e^\varphi|^2 = -\sin\theta}$$

$$+ r^{-1} \left(\partial_\theta \partial_r (f \circ d) \underbrace{\langle e^r, e^\theta \rangle}_{=0} + \partial_r (f \circ d) \underbrace{\langle \partial_\theta e^r, e^\theta \rangle}_{=0} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos\varphi \sin\theta \\ -\sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = e^\theta$$

$$\underbrace{\quad}_{= \langle e^\theta, e^\theta \rangle = 1}$$

$$+ \partial_\theta (r^{-1} \cos\theta \partial_\varphi (f \circ d)) \underbrace{\langle e^\varphi, e^\theta \rangle}_{=0}$$

$$+ r^{-1} \cos\theta \partial_\varphi (f \circ d) \underbrace{\langle \partial_\theta e^\varphi, e^\theta \rangle}_{=0}$$

$$+ r^{-1} \partial_\theta^2 (f \circ d) \underbrace{|e^\theta|^2}_{=1} + r^{-1} \partial_\theta (f \circ d) \underbrace{\langle \partial_\theta e^\theta, e^\theta \rangle}_{=-e^r}$$

$$\underbrace{\quad}_{= -\langle e^r, e^\theta \rangle = 0}$$

$$= \partial_r^2 (f \circ d) + r^{-1} \partial_r (f \circ d)$$

$$+ r^{-2} \cos^2\theta \partial_\varphi^2 (f \circ d) - r^{-2} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \partial_\theta (f \circ d)$$

$$+ r^{-1} \partial_r (f \circ d) + r^{-2} \partial_\theta^2 (f \circ d)$$

Schließlich:

$$\Delta f \circ d = \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + r^{-2} \left(\partial_\theta^2 + \frac{1}{\cos^2\theta} \partial_\varphi^2 - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \partial_\theta \right) \right) (f \circ d)$$

$$\underbrace{\quad}_{=: \Delta_{\varphi, \theta}}$$

"Laplace-Operator auf S^2 "

$$\text{also: } \Delta f \circ \phi = \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\phi, \Theta} \right) (f \circ \phi) \quad (6)$$

(iv) Nach (iii) gilt

$$\nabla (f \circ \phi) = J_\phi^t \nabla f \circ \phi,$$

also

$$\begin{aligned} \nabla (f \circ \phi) \circ \phi^{-1} &= J_\phi^t \circ \phi^{-1} \nabla f \\ &= \begin{bmatrix} (e^r)^t \\ r \cos \Theta (e^\varphi)^t \\ r (e^\Theta)^t \end{bmatrix} \circ \phi^{-1} \nabla f \end{aligned}$$

$$\text{Mit } x = r e^r = r \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \Theta \\ \sin \varphi \cos \Theta \\ \sin \Theta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x' := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

gilt:

$$|x| = r$$

$$\frac{x}{|x|} = e^r$$

$$x_3 = r \sin \Theta$$

$$|x'| = r \cos \Theta$$

$$\frac{x_1}{|x'|} = \cos \varphi$$

$$\frac{x_2}{|x'|} = \sin \varphi$$

$$\text{Also: } e^\varphi = |x'|^{-1} \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e^\Theta = \begin{bmatrix} -\frac{x_1 x_3}{|x'| |x|} \\ -\frac{x_2 x_3}{|x'| |x|} \\ \frac{|x'|}{|x|} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r \cos \Theta e^\varphi = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r e^\Theta = |x'|^{-1} \begin{bmatrix} -x_1 x_3 \\ -x_2 x_3 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix}$$

Wir erhalten:

(7)

$$\nabla(f \circ \phi) \circ \phi^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{|x|} & \frac{x_2}{|x|} & \frac{x_3}{|x|} \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ \frac{-x_1 x_3}{|x|^3} & \frac{-x_2 x_3}{|x|^3} & |x| \end{bmatrix} \nabla f$$

$$= \partial_1 f \begin{bmatrix} \frac{x_1}{|x|} \\ -x_2 \\ \frac{-x_1 x_3}{|x|^3} \end{bmatrix} + \partial_2 f \begin{bmatrix} \frac{x_2}{|x|} \\ x_1 \\ \frac{-x_2 x_3}{|x|^3} \end{bmatrix} + \partial_3 f \begin{bmatrix} \frac{x_3}{|x|} \\ 0 \\ |x| \end{bmatrix}$$



Ich gebe zu, die Aufgabe war etwas schwierig.
Entschuldigung!

(H4)

$$\stackrel{H3}{\Rightarrow} 0 = \Delta u \circ \phi = \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r} \Delta_{\mathbb{S}^2} \right) \underbrace{(u \circ \phi)}_{=u}$$

Da u nur von r abhängt und nicht von ϕ oder θ ,
d.h. $\partial_\phi u = 0$,
 $\partial_\theta u = 0$.

$$\Rightarrow \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) u = 0$$

$$\Rightarrow u''(r) + \frac{2}{r} u'(r) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u''(r)}{u'(r)} = -\frac{2}{r}, \text{ falls } u'(r) \neq 0!$$

$$\Rightarrow \ln u'(r) = \int^r \frac{u''(t)}{u'(t)} dt + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$= -2 \ln r + \alpha$$

$$\Rightarrow U'(r) = \exp(-2\ln r + \alpha) \quad (8)$$

$$= \underbrace{e^\alpha}_{=: \beta} r^{-2} > 0$$

$$\Rightarrow U(r) = \int^r U'(t) dt + \gamma$$

$$= -\beta r^{-1} + \gamma, \quad \beta > 0, \gamma \in \mathbb{R}$$

Probe: $U''(r) + \frac{2}{r} U'(r) = -\frac{2\beta}{r^3} + \frac{2}{r} \frac{\beta}{r^2} = 0$ stimmt!

(15) Die Kettenregel liefert mit $\|x\|^2 = 2x$

$$0 = \frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 = 2(x(t))^t \cdot x'(t) = 2\langle x(t), x'(t) \rangle$$

$$\Rightarrow \langle x(t), x'(t) \rangle = 0 \Rightarrow x(t) \perp x'(t) \quad \forall t.$$

Mathematik für Chemiker II

11. Übung im SS 2010

Lösungen der Hausaufgaben bis
DIENSTAG, 20. JULI,
in den Kasten vor dem Dekanat der Mathematik einwerfen!

Aufgabe G1

Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten

$$\int_{\Omega} f(x) dx$$

für

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x|^2 < 2, x_1 > 0\}$$

$$\text{und } f(x) := \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}},$$

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_2 > 0\}$$

$$\text{und } f(x) := \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 < |\xi|^2\}$$

$$\text{und } f(x) := |x|^2$$

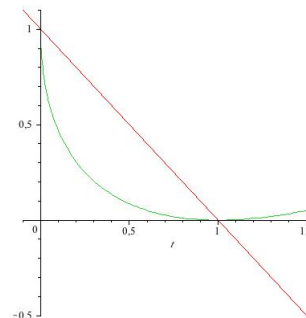
mit $R > 0$ und $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe G2

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Omega} 7x_1x_2^2 dx,$$

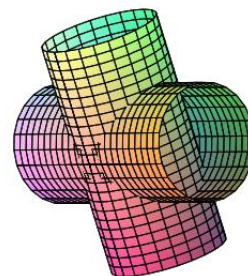
wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ im ersten Quadranten zwischen $x_1 + x_2 = 1$ und $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1$ liegt.



Aufgabe G3

Bestimmen Sie das Volumen des Durchschnitts der beiden Zylinder Z_2 und Z_3 , wobei für $n \in \{1, 2, 3\}$

$$Z_n := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 - x_n^2 < 1\}.$$



Aufgabe H1

(10 Punkte)

Bestimmen Sie den Schwerpunkt s des Einheitstetraeders

$$T := \{x \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 < 1\},$$

d.h., mit $|T| := \int_T 1 \, dx$ den Vektor

$$s := \frac{1}{|T|} \int_T x \, dx = \frac{1}{|T|} \begin{bmatrix} \int_T x_1 \, dx \\ \int_T x_2 \, dx \\ \int_T x_3 \, dx \end{bmatrix}.$$

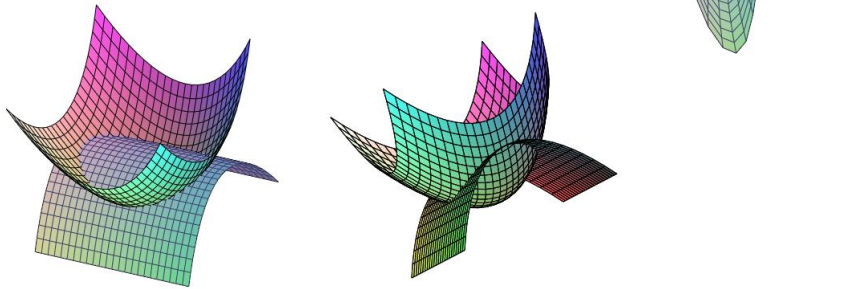
Aufgabe H2

(10 Punkte)

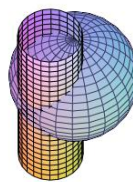
Berechnen Sie das Volumen des Bereichs zwischen dem parabolischen Zylinder Z und dem elliptischen Paraboloid P mit

$$Z := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 4 - x_2^2\},$$

$$P := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 2x_1^2 + x_2^2\}.$$

**Aufgabe H3**

(10 Punkte)

Aus einer Kugel mit Radius $R > 0$ wird ein zylindrisches Loch mit Radius $R/2$ so ausgebohrt, daß der Kugelmittelpunkt auf dem Rand des Bohrlochs liegt. Welches Volumen bleibt übrig?**Aufgabe H4**

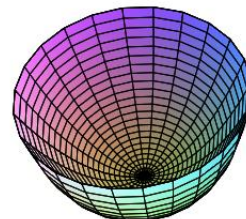
(10 Punkte)

Berechnen Sie die Trägheitsmomente T_n von

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 < x_3 < x_1^2 + x_2^2\}$$

bei Drehung um die Koordinatenachsen, d.h., für $n = 1, 2, 3$

$$T_n := \int_{\Omega} (|x|^2 - x_n^2) \, dx.$$

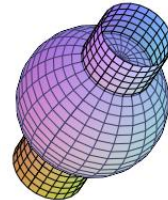


Aufgabe F1

(20 Punkte)

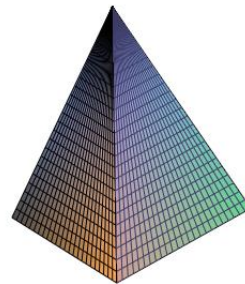
Aus einer Kugel mit Radius $R > 0$ wird ein zylindrisches Loch mit Radius $r < R$ so ausgebohrt, daß die Bohrachse durch den Kugelmittelpunkt verläuft. Welches Restvolumen bleibt übrig? Welches Trägheitsmoment T hat der Bohrkern B bei Drehung um die Bohrachse, d.h., z.B.

$$T := \int_B (x_1^2 + x_2^2) dx = ?$$

**Aufgabe F2**

(20 Punkte)

Eine Pyramide P soll die Höhe $h > 0$ und als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $\ell > 0$ haben. Skizze! Geben Sie eine (möglichst einfache) Beschreibung von P als Punktmenge des $\mathbb{R}^3$ an. Berechnen Sie sodann das Volumen und den Schwerpunkt der Pyramide P .



Mathematik für Chemiker II

11. Übung im SS 2010 Lösungsvorschlag

Aufgabe H1

Der Tetraeder T stellt einen Normalbereich dar, denn z.B. ist

$$T = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 - x_1, 0 < x_3 < 1 - x_1 - x_2\}.$$

Dann gelten

$$\begin{aligned} |T| &= \int_T \mathbf{1} \, dx = \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^{1-x_1} \int_{x_3=0}^{1-x_1-x_2} 1 \, dx_3 \, dx_2 \, dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^{1-x_1} (1 - x_1 - x_2) \, dx_2 \, dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_1=0}^1 (1 - x_1)^2 \, dx_1 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}, \\ \int_T x_1 \, dx &= \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^{1-x_1} \int_{x_3=0}^{1-x_1-x_2} x_1 \, dx_3 \, dx_2 \, dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_1=0}^1 \underbrace{x_1}_{\downarrow} \underbrace{(1-x_1)^2}_{\uparrow} \, dx_1 = \frac{1}{3!} \int_{x_1=0}^1 (1-x_1)^3 \, dx_1 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

und daher $s = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, da T in x_1, x_2, x_3 symmetrisch ist.

Aufgabe H2

Der Raumbereich Ω zwischen dem parabolischen Zylinder Z und dem elliptischen Paraboloiden P wird gegeben durch

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1^2 + x_2^2 < x_3 < 4 - x_2^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 : |x'| < \sqrt{2}, 2x_1^2 + x_2^2 < x_3 < 4 - x_2^2\}, \quad x' := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

denn $\Omega \neq \emptyset$ genau dann, wenn $2x_1^2 + x_2^2 < 4 - x_2^2$, d.h., $2x_1^2 + 2x_2^2 < 4$, also $|x'|^2 < 2$. Wir integrieren direkt und benutzen am Ende noch Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \int_{\Omega} \mathbf{1} \, dx = \int_{|x'| < \sqrt{2}} \int_{x_3=2x_1^2+x_2^2}^{4-x_2^2} 1 \, dx_3 \, dx' = 2 \int_{|x'| < \sqrt{2}} (2 - |x'|^2) \, dx' \\ &= 4\pi \cdot 2 - 2 \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 r \, d\varphi \, dr = 8\pi - 4\pi \cdot 4/4 = 4\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe H3

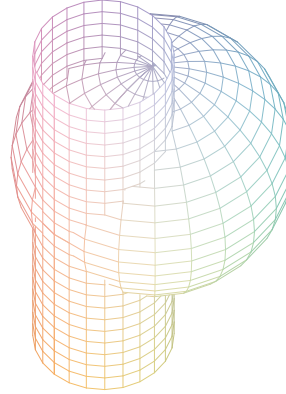
Wählen wir die Kugel

$$K := U(0, R) := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$$

und den unendlichen Zylinder (ohne Rand) Z mit Radius $\rho := R/2$, der die Gerade

$$g := \{\rho e^1 + \lambda e^3 : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

als Mittelachse besitzt, so ist die Schnittmenge $L := K \cap Z$ gerade unser Bohrloch. Wir wollen das zu bestimmende Integral in Zylinderkoordinaten ausrechnen, d.h.,



$$x = \Phi(r, \varphi, t) := \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ t \end{bmatrix}, \quad J_\Phi(r, \varphi, t) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und $\det \Phi'(r, \varphi, t) = \det J_\Phi(r, \varphi, t) = r$. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} x = \Phi(r, \varphi, t) \in L \\ \Leftrightarrow \quad r^2 + t^2 < R^2 \quad \wedge \quad \left| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - R/2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right|^2 < R^2/4 \\ \Leftrightarrow \quad r^2 + t^2 < R^2 \quad \wedge \quad (r \cos \varphi - R/2)^2 + r^2 \sin^2 \varphi < R^2/4 \\ \Leftrightarrow \quad r^2 + t^2 < R^2 \quad \wedge \quad r^2 - Rr \cos \varphi < 0 \\ \Leftrightarrow \quad r^2 + t^2 < R^2 \quad \wedge \quad r - R \cos \varphi < 0. \end{aligned}$$

Da die zweite Bedingung nur für positive $\cos \varphi$ erfüllt werden kann, folgt

$$\begin{aligned} x = \Phi(r, \varphi, t) \in L \\ \Leftrightarrow \quad r^2 + t^2 < R^2 \quad \wedge \quad -\pi/2 < \varphi < \pi/2 \quad \wedge \quad r < R \cos \varphi \\ \Leftrightarrow \quad -\pi/2 < \varphi < \pi/2 \quad \wedge \quad r < R \cos \varphi \quad \wedge \quad |t| < (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow: \quad (r, \varphi, t) \in \Omega. \end{aligned}$$

Mit dem Transformationssatz und dem Satz von Fubini gilt dann für integrierbare Funktionen f

$$\begin{aligned} \int_L f(x) dx &= \int_\Omega f(\Phi(r, \varphi, t)) r d(r, \varphi, t) \\ &= \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R \cos \varphi} \int_{t=-(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}^{(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}} f(\Phi(r, \varphi, t)) r dt dr d\varphi. \end{aligned}$$

Mit diesen Vorbereitungen können wir das Volumen des Bohrloches bestimmen:

$$\begin{aligned}
|L| &= \int_L \mathbf{1} \, dx = \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R \cos \varphi} \int_{t=-(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}^{(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}} r \, dt \, dr \, d\varphi \\
&= 2 \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R \cos \varphi} r (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \, dr \, d\varphi \\
&= -\frac{2}{3} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{R \cos \varphi} d\varphi \\
&= \frac{2}{3} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R^3 - R^3 |\sin \varphi|^3) \, d\varphi \\
&= \frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} R^3 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \, d\varphi \\
&= \frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} R^3 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi - \sin \varphi \cos^2 \varphi) \, d\varphi \\
&= \frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} R^3 \left(-\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \Big|_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{8}{9} R^3
\end{aligned}$$

Da das Volumen der Kugel $\frac{4}{3}\pi R^3$ beträgt, ergibt sich ein Restvolumen von

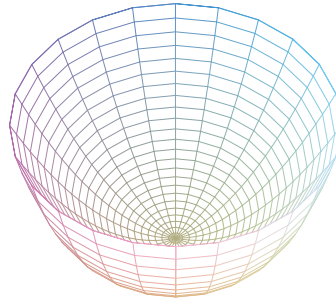
$$|K \setminus \overline{L}| = |K \setminus \overline{Z}| = \frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{8}{9}R^3.$$

Aufgabe H4

Wir transformieren auf Zylinderkoordinaten, d.h.,

$$x = \Phi(r, \varphi, t) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ t \end{bmatrix},$$

$$\det J_{\Phi}(r, \varphi, t) = r.$$



Wegen $x_1^2 + x_2^2 = |x|^2 = r^2$ läßt sich Ω dann wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{x \in \mathbb{R}^3 : (x_1^2 + x_2^2)^2 = |x|^4 < x_3 < |x|^2 = x_1^2 + x_2^2\} \\
&= \{x = \Phi(r, \varphi, t) \in \mathbb{R}^3 : r^4 < t < r^2\}
\end{aligned}$$

Da $r^4 < t < r^2$ nur für $0 < r < 1$ erfüllt sein kann, gilt

$$\Omega = \{\Phi(r, \varphi, t) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < r < 1, r^4 < t < r^2\}.$$

Die Substitutionsregel (Transformationssatz) und der Satz von Fubini liefern nun für beliebige integrierbare Funktionen f

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{t=r^4}^{r^2} f(\Phi(r, \varphi, t)) \, r \, dt \, dr \, d\varphi$$

und somit die drei Trägheitsmomente

$$\begin{aligned}
T_1 &= \int_{\Omega} (x_2^2 + x_3^2) dx = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{t=r^4}^{r^2} (r^2 \sin^2 \varphi + t^2) r dt dr d\varphi \\
&= \pi \int_{r=0}^1 r^3 (r^2 - r^4) dr + 2\pi \int_{r=0}^1 \underbrace{r \frac{1}{3} t^3 \Big|_{t=r^4}^{r^2}}_{=\frac{1}{3}(r^7 - r^{13})} dr \\
&= \pi \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \frac{2}{3} \pi \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{14} \right) = \frac{13}{168} \pi, \\
T_3 &= \int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) dx = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{t=r^4}^{r^2} r^2 r dt dr d\varphi \\
&= 2\pi \int_{r=0}^1 r^3 (r^2 - r^4) dr = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

und $T_2 = T_1$ wegen Symmetrie.

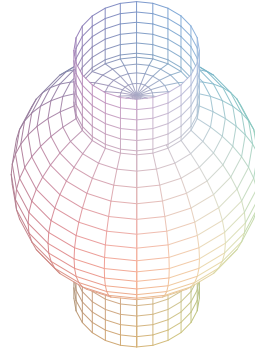
Aufgabe F1

Wir benutzen wieder Zylinderkoordinaten

$$x = \Phi(\rho, \varphi, t) = \begin{bmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ t \end{bmatrix},$$

$$\det J_{\Phi}(\rho, \varphi, t) = \rho.$$

Bezeichnen wir den offenen unendlichen Zylinder mit Radius r , dessen Mittelachse die x_3 -Achse ist, mit $Z(r)$, so sei unser Bohrkern gerade $B := U(0, R) \cap Z(r)$ und es gilt



$$x \in B \quad \Leftrightarrow \quad |x| < R \wedge x_1^2 + x_2^2 < r^2.$$

Die Übersetzung in Zylinderkoordinaten lautet dann

$$\begin{aligned}
x = \Phi(\rho, \varphi, t) \in B &\quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 + t^2 < R^2 \quad \wedge \quad \rho^2 < r^2 \\
&\quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \wedge \quad \rho < r \quad \wedge \quad |t| < (R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Volumen des Bohrkerns

$$\begin{aligned}
|B| &= \int_B \mathbf{1} dx = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^r \int_{t=-(R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}^{(R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \rho dt d\rho d\varphi = 4\pi \int_{\rho=0}^r \rho (R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} d\rho \\
&= -\frac{4}{3} \pi (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\rho=0}^r = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Da das Volumen der Kugel $\frac{4}{3}\pi R^3$ beträgt, ergibt sich nach der Bohrung ein Restvolumen von $\frac{4}{3}\pi(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}$. Für das Trägheitsmoment bestimmen wir schließlich

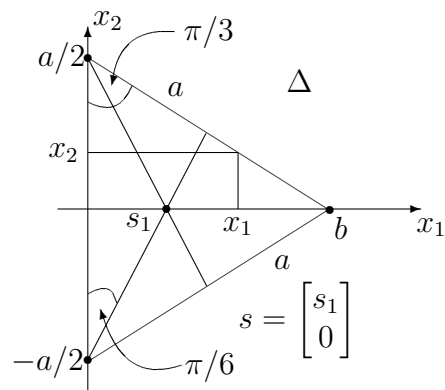
$$\begin{aligned} T &= \int_B (x_1^2 + x_2^2) dx = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^r \int_{t=-(R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}^{(R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \rho^3 dt d\rho d\varphi \\ &= 4\pi \int_{\rho=0}^r \rho^3 (R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} d\rho \\ &= \dots = \frac{8}{15}\pi R^5 - \frac{8}{15}\pi R^2 (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}\pi r^2 (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt partiell integriert haben.

Aufgabe F2

Wir beginnen zunächst mit einer Darstellung eines (offenen) gleichseitigen Dreiecks Δ , welches wir dem ersten Bild entsprechend in das x_1 - x_2 -Koordinatensystem legen. Mit dem Satz von Pythagoras bestimmen wir aus $(a/2)^2 + b^2 = a^2$ die Größe $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ und erhalten so die Grenzen für die erste Koordinate

$$0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$



Mit Hilfe des Tangens oder Strahlensatzes ergibt sich bei festem x_1 ein maximales bzw. minimales x_2 durch

$$\frac{a/2 - |x_2|}{x_1} = \frac{a/2}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ also } |x_2| = \frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}x_1.$$

Damit lässt sich das gleichseitige Dreieck Δ durch

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}a, |x_2| < \frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}x_1\}$$

darstellen. Wenn P eine gerade Pyramide werden soll, so ist ihre Spitze

$$S = \begin{bmatrix} s \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ 0 \\ h \end{bmatrix},$$

wobei s der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten (oder Winkelhalbierenden) unseres Dreiecks Δ ist. Der ersten Skizze entnehmen wir

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{s_1}{a/2} \Rightarrow s_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} \frac{a}{2\sqrt{3}} \\ 0 \\ h \end{bmatrix}.$$

Indem wir nun linear jeden Punkt des Dreiecks Δ mit der Spitze S der Pyramide durch eine Strecke verbinden, erhalten wir eine Darstellung unserer (offenen) Pyramide P , nämlich

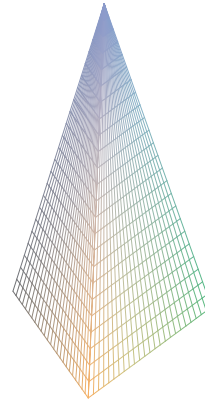
$$P = \{x = \Phi(u, v, t) \in \mathbb{R}^3 : (u, v, t) \in \Omega\}$$

mit $\Omega := \Delta \times (0, 1)$ und

$$\Phi(u, v, t) := (1 - t) \begin{bmatrix} \frac{a}{2\sqrt{3}} \\ 0 \\ h \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix},$$

d.h.,

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in \Delta, 0 < t < 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 < u < \frac{\sqrt{3}}{2}a, |v| < \frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}u, 0 < t < 1 \right\}. \end{aligned}$$



Wegen

$$J_{\Phi}(u, v, t) = \begin{bmatrix} t & 0 & u - \frac{a}{2\sqrt{3}} \\ 0 & t & v \\ 0 & 0 & -h \end{bmatrix}, \quad |\det J_{\Phi}(u, v, t)| = t^2 h$$

liefern der Transformationssatz und der Satz von Fubini (Ω ist ein Normalgebiet!) für integrierbare Funktionen f

$$\begin{aligned} \int_P f(x) dx &= \int_{\Omega} f(\Phi(u, v, t)) t^2 h d(u, v, t) \\ &= \int_{u=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \int_{v=-\frac{a}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}u}^{\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}u} \int_{t=0}^1 f(\Phi(u, v, t)) t^2 h dt dv du. \end{aligned}$$

Nun können wir das Volumen $|P|$ und den Schwerpunkt $\sigma(P)$ von P bestimmen. Mit

$$|P|\sigma(P) = \int_P x dx$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} |P| &= \int_P \mathbf{1} dx = \int_{u=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \int_{v=-\frac{a}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}u}^{\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}u} \int_{t=0}^1 t^2 h dt dv du \\ &= \frac{h}{3} \int_{u=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(a - \frac{2}{\sqrt{3}}u\right) du = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 h \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|P|\sigma_1(P) &= \int_P x_1 dx = \int_{u=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \int_{v=-\frac{a}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}u}^{\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}u} \int_{t=0}^1 \left((1-t)\frac{a}{2\sqrt{3}} + tu\right) t^2 h dt dv du \\
&= h \int_{u=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \int_{v=-\frac{a}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}u}^{\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}u} \left(\frac{a}{24\sqrt{3}} + \frac{1}{4}u\right) dv du = \dots = \frac{a^3 h}{24}, \\
|P|\sigma_2(P) &= \int_P x_2 dx = \int_{u=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \int_{v=-\frac{a}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}u}^{\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}u} \int_{t=0}^1 tv t^2 h dt dv du \\
&= \frac{h}{4} \int_{u=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \underbrace{\int_{v=-\frac{a}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}u}^{\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}u} v dv}_{=0} du = 0, \\
|P|\sigma_3(P) &= \int_P x_3 dx = \int_{u=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \int_{v=-\frac{a}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}u}^{\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}u} \int_{t=0}^1 (1-t)ht^2 h dt dv du \\
&= \frac{1}{12} h^2 \int_{u=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(a - \frac{2}{\sqrt{3}}u\right) du = \dots = \frac{\sqrt{3}}{48} a^2 h^2.
\end{aligned}$$

Wir bekommen also

$$\sigma(P) = \frac{12}{\sqrt{3}a^2 h} \begin{bmatrix} \frac{a^3 h}{24} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}a^2 h^2}{48} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2\sqrt{3}} \\ 0 \\ h/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ h/4 \end{bmatrix}.$$