

Aufgabe 1

Seien $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zweimal bzw. einmal stetig differenzierbar. Wir erklären den Gradienten, die Divergenz und den Laplace-Operator durch

$$\nabla f := \begin{bmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{bmatrix}, \quad \operatorname{div} F := \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2, \quad \Delta f := \operatorname{div} \nabla f := (\partial_1^2 + \partial_2^2)f.$$

Ferner definieren wir Polarkoordinaten $x = \Phi(r, \varphi)$ im $\mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} \Phi &: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \varphi) &\longmapsto r \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (i) Bestimmen Sie J_Φ und J_Φ^{-1} .
- (ii) Normieren Sie $\partial_r \Phi$ und $\partial_\varphi \Phi$ zu Einheitsvektoren e^r und e^φ .
- (iii) Bestimmen Sie ∇f , $\operatorname{div} F$ und Δf in Polarkoordinaten, d.h., zeigen Sie

$$\begin{aligned} (\nabla f) \circ \Phi &= \partial_r(f \circ \Phi)e^r + \frac{1}{r} \partial_\varphi(f \circ \Phi)e^\varphi, \\ (\operatorname{div} F) \circ \Phi &= \langle \partial_r(F \circ \Phi), e^r \rangle + \frac{1}{r} \langle \partial_\varphi(F \circ \Phi), e^\varphi \rangle, \\ (\Delta f) \circ \Phi &= \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \right) (f \circ \Phi). \end{aligned}$$

- (iv) Bestimmen Sie $\nabla(f \circ \Phi)$ in kartesischen Koordinaten.

Aufgabe 2

Wie Aufgabe 1 nur im $\mathbb{R}^3$, dh., mit Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \Phi &: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, \theta) &\longmapsto r \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$\Delta u = 0$$

für zweimal stetig differenzierbare $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ der Gestalt $u \circ \Phi(r, \varphi, \theta) = U(r)$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten

$$\int_{\Omega} f(x) dx$$

für

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x|^2 < 2, x_1 > 0\} \quad \text{und} \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}},$$

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_2 > 0\} \quad \text{und} \quad f(x) := \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 < |\xi|^2\} \quad \text{und} \quad f(x) := |x|^2$$

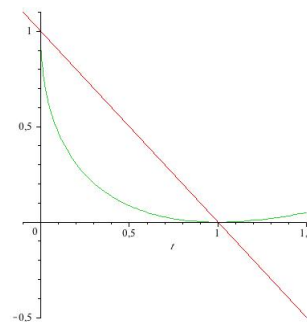
mit $R > 0$ und $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Omega} 7x_1 x_2^2 dx,$$

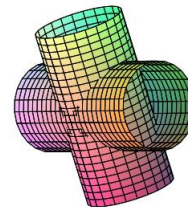
wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ im ersten Quadranten zwischen $x_1 + x_2 = 1$ und $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1$ liegt.



Aufgabe 6

Bestimmen Sie das Volumen des Durchschnitts der beiden Zylinder Z_2 und Z_3 , wobei für $n \in \{1, 2, 3\}$

$$Z_n := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 - x_n^2 < 1\}.$$



Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Schwerpunkt s des Einheitstetraeders

$$T := \{x \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 < 1\},$$

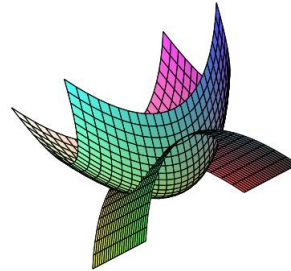
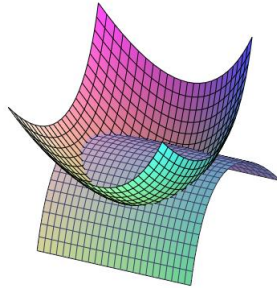
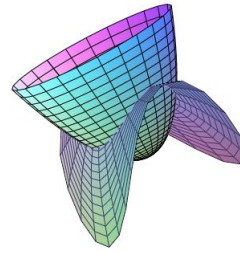
d.h., mit $|T| := \int_T 1 dx$ den Vektor

$$s := \frac{1}{|T|} \int_T x dx = \frac{1}{|T|} \begin{bmatrix} \int_T x_1 dx \\ \int_T x_2 dx \\ \int_T x_3 dx \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 8

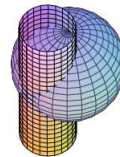
Berechnen Sie das Volumen des Bereichs zwischen dem parabolischen Zylinder Z und dem elliptischen Paraboloid P mit

$$Z := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 4 - x_2^2\},$$
$$P := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 2x_1^2 + x_2^2\}.$$



Aufgabe 9

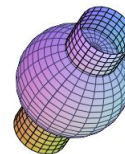
Aus einer Kugel mit Radius $R > 0$ wird ein zylindrisches Loch mit Radius $R/2$ so ausgebohrt, daß der Kugelmittelpunkt auf dem Rand des Bohrlochs liegt. Welches Volumen bleibt übrig?



Aufgabe 10

Aus einer Kugel mit Radius $R > 0$ wird ein zylindrisches Loch mit Radius $r < R$ so ausgebohrt, daß die Bohrachse durch den Kugelmittelpunkt verläuft. Welches Restvolumen bleibt übrig? Welches Trägheitsmoment T hat der Bohrkern B bei Drehung um die Bohrachse, d.h., z.B.

$$T := \int_B (x_1^2 + x_2^2) dx = ?$$



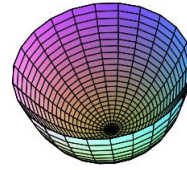
Aufgabe 11

Berechnen Sie die Trägheitsmomente T_n von

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 < x_3 < x_1^2 + x_2^2\}$$

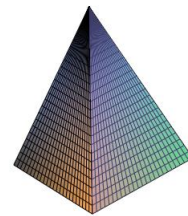
bei Drehung um die Koordinatenachsen, d.h., für $n = 1, 2, 3$

$$T_n := \int_{\Omega} (|x|^2 - x_n^2) dx.$$



Aufgabe 12

Eine Pyramide P soll die Höhe $h > 0$ und als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $\ell > 0$ haben. Skizze! Geben Sie eine (möglichst einfache) Beschreibung von P als Punktmenge des $\mathbb{R}^3$ an. Berechnen Sie sodann das Volumen und den Schwerpunkt der Pyramide P .



- Vortrag 1: Aufgabe 1, Aufgabe 2, Aufgabe 3
(Tim Vogel)
- ~~Vortrag 2: Aufgabe 4, Aufgabe 5~~
- Vortrag 3: Aufgabe 6, Aufgabe 7
(Linell Dehne)
- Vortrag 4: Aufgabe 8
(Jonathan Linz)
- Vortrag 5: Aufgabe 9, Aufgabe 10
(Anna Pauline Konrad)
- Vortrag 6: Aufgabe 11
(Gwenda Roselene Rode)
- Vortrag 7: Aufgabe 12
(Lisa-Marie Meixner)