

Analysis 3

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Prof. Dr. Marcus Waurick

Institut für Angewandte Analysis
TU Bergakademie Freiberg

Wintersemester 2022/23

Inhaltsverzeichnis

I. Grundlagen und skalare Differentialgleichungen 1. Ordnung	4
1. Grundlegende Definitionen	5
2. Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung	8
3. Substitutionsmethoden	14
4. Exakte Differentialgleichungen	17
II. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	25
5. Banachräume stetiger Funktionen	26
6. Der Satz von Arzelà-Ascoli	28
7. Der Banach'sche Fixpunktsatz	31
8. Der Existenzsatz von Peano	32
9. Eindeutigkeit von Lösungen und der Satz von Picard-Lindelöf	35
III. Lineare Differentialgleichungen	41
10. Lineare Systeme von Differentialgleichungen	42
11. Lineare Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	46
12. Lineare skalare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	53
13. Lineare skalare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	55

IV. Anhang	62
A. Der Satz von Cayley-Hamilton	63

Literatur

- ▶ H. Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen
- ▶ W. Walther, Gewöhnliche Differentialgleichungen
- ▶ O. Forster, Analysis 2
- ▶ W. Werner, Einführung in die höhere Analysis

Teil I.

Grundlagen und skalare
Differentialgleichungen 1.
Ordnung

1. Grundlegende Definitionen

Wir beginnen mit der Definition gewöhnlicher Differentialgleichungen. Generell sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition. Sei $F : U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{(n+1) \cdot m+1} \rightarrow \mathbb{K}^k$ eine Funktion. Dann heißt die Gleichung

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

eine *gewöhnliche Differentialgleichung der Dimension m mit maximaler Ordnung n* . Eine n -mal stetig differenzierbare Funktion $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^m$ für ein offenes Intervall I heißt *Lösung* von (1.1), falls

$$\forall x \in I : (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in U$$

und

$$\forall x \in I : F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Diese Definition ist für die Praxis zu allgemein, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 1.1. Betrachte die Funktion $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x, y, z) := x + y$. Die zugehörige Differentialgleichung lautet dann

$$0 = x + y(x),$$

und eine Lösung ist trivial durch $y(x) = -x$ gegeben. Da in dieser Gleichung keine Ableitungen auftauchen, ist es nicht sinnvoll hier von einer Differentialgleichung zu sprechen. Ein noch extremeres Beispiel für eine nicht sinnvolle Differentialgleichung liefert die Funktion $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F = 0$. Dann löst jede Funktion die zugehörige Differentialgleichung.

Wir werden uns daher auf so genannte explizite Differentialgleichungen einschränken.

Definition. Sei $f : U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{n \cdot m} \rightarrow \mathbb{K}^m$. Dann heißt die Gleichung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.2)$$

eine *explizite Differentialgleichung der Dimension m und Ordnung n* (kurz: DGL). Eine n -mal stetig differenzierbare Funktion $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^m$ für ein offenes Intervall I heißt *Lösung* von (1.1), falls

$$\forall x \in I : (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in U$$

und

$$\forall x \in I : y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

1. Grundlegende Definitionen

Bemerkung 1.2. Offenbar ist eine explizite Differentialgleichung eine Differentialgleichung mit

$$F(x, y_0, y_1, \dots, y_n) := f(x, y_0, \dots, y_{n-1}) - y_n.$$

Beispiel 1.3. Wir betrachten den Flug eines Fallschirmspringers und bezeichnen mit $y(t)$ die Höhe des Fallschirmspringers über dem Boden zum Zeitpunkt t . Damit sind $y'(t)$ und $y''(t)$ die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Fallschirmspringers zur Zeit t . Diese Größen erfüllen die folgende Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$m \cdot y'' + r \cdot y' = m \cdot g,$$

wobei $m > 0$ die Masse des Fallschirmspringers, r den Luftwiderstand und g die Fallbeschleunigung bezeichne. In der Tat handelt es sich hier um eine DGL 2. Ordnung mit

$$f(x, y_0, y_1) := g - \frac{r}{m} y_1.$$

Die zentralen Fragen für eine gegebene DGL sind nun: Existiert eine Lösung und ist diese eindeutig? Für die Eindeutigkeit müssen wir die Definition von Lösungen etwas verschärfen, wie die folgende Überlegung zeigt:

Ist $f : U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{n-m} \rightarrow \mathbb{K}^m$ gegeben und $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^m$ eine Lösung der DGL

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Dann ist auch für $\tilde{I} \subset I$ offen die Funktion $y|_{\tilde{I}}$ eine Lösung.

Definition. Sei $f : U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{n-m} \rightarrow \mathbb{K}^m$. Eine Lösung $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^m$ von (1.2) heißt *maximal*, falls für alle Lösungen $\tilde{y} : \tilde{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^m$ von (1.2) mit $y \subseteq \tilde{y}$ (d.h. $I \subseteq \tilde{I}$ und $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in I$) folgt $y = \tilde{y}$.

Wir schließen dieses Kapitel mit der Beobachtung ab, dass es genügt Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten.

Satz 1.4. Sei $f : U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{n-m} \rightarrow \mathbb{K}^m$ und definiere die Funktion

$$\begin{aligned} g : U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{n-m} &\rightarrow \mathbb{K}^{n-m} \\ (x, y_0, \dots, y_{n-1}) &\mapsto (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, f(x, y_0, \dots, y_{n-1})). \end{aligned}$$

Wir betrachten die DGL

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{1.3}$$

sowie

$$z' = g(x, z). \tag{1.4}$$

Dann gelten:

1. Grundlegende Definitionen

(a) Ist $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^m$ eine Lösung von (1.3), so ist $z : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^{n \cdot m}$ mit

$$z(x) := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

eine Lösung von (1.4).

(b) Ist $z = (z_1, \dots, z_n) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^{n \cdot m}$ eine Lösung von (1.4), so ist $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^m$ mit

$$y(x) = z_1(x)$$

eine Lösung von (1.3).

Beweis. (a) Sei $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^m$ eine Lösung von (1.3). Dann ist z differenzierbar und es gilt

$$z'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \end{pmatrix} = g(x, z(x)).$$

(b) Ist $z : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^{n \cdot m}$ eine Lösung von (1.4), so gilt

$$\begin{pmatrix} z'_1(x) \\ z'_2(x) \\ \vdots \\ z'_n(x) \end{pmatrix} = z'(x) = g(x, z(x)) = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ z_3(x) \\ \vdots \\ f(x, z_1(x), \dots, z_{n-1}(x)) \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $z'_1(x) = z_2(x)$ und somit ist z_1 2-mal differenzierbar mit $z''_1(x) = z'_2(x) = z_3(x)$. Induktiv folgt hieraus, dass z_1 n -mal differenzierbar ist mit

$$z_1^{(k)} = z_{k+1}$$

für alle $k \in \{0, \dots, n-1\}$ und daher

$$z_1^{(n)}(x) = z'_n(x) = f(x, z_1(x), \dots, z_n(x)) = f(x, z_1(x), z'_1(x), \dots, z_1^{(n-1)}(x)). \quad \square$$

2. Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

Lemma 2.1. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei ferner $U \subseteq I$ offen und abgeschlossen. Dann gilt $U = I$ oder $U = \emptyset$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $I \setminus U, U \neq \emptyset$. Dann definieren wir die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in I \setminus U, \\ -1 & \text{falls } x \in U. \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig (Übung!). Nach Zwischenwertsatz müsste sie demnach den Wert 0 annehmen. Widerspruch! Somit gilt $U = \emptyset$ oder $I \setminus U = \emptyset$. $\square$

Satz 2.2 (Trennung der Variablen). *Seien $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $g : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $h : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Seien ferner $x_0 \in I_1$ und $y_0 \in I_2$ mit $h(y_0) > 0$. Dann existiert ein offenes Intervall $I \subseteq I_1$ mit $x_0 \in I$ und genau eine stetig differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y[I] \subseteq I_2$ und*

$$y'(x) = g(x)h(y(x)) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.1)$$

Mit anderen Worten, die Differentialgleichung

$$y' = g(x)h(y)$$

besitzt in einer Umgebung von x_0 eine eindeutige Lösung, die der Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0$$

genügt.

Beweis. Da h stetig ist, existiert ein offenes Intervall $J \subseteq I_2$ mit $y_0 \in J$ und $h|_J > 0$. Sei nun $H : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ auf J . Dann ist H streng monoton wachsend (beachte $H'(s) = \frac{1}{h(s)} > 0$), und somit invertierbar. Wir setzen weiter

$$G(x) := \int_{x_0}^x g(r) \, dr \quad (x \in I_1).$$

2. Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

Da G stetig ist und $G(x_0) = 0$, existiert ein offenes Intervall $I \subseteq I_1$ mit $x_0 \in I$ und $G(x) + H(y_0) \in H[J]$. Damit können wir nun

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + H(y_0)) \quad (x \in I), \quad (2.2)$$

definieren. Wir zeigen, dass y gegeben durch (2.2) eine Lösung von (2.1) ist. Zunächst ist y als Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen ebenfalls stetig differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= (H^{-1})'(G(x) + H(y_0))G'(x) \\ &= \frac{1}{H'(H^{-1}(G(x) + H(y_0)))}g(x) \\ &= \frac{1}{H'(y(x))}g(x) \\ &= h(y(x))g(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in I$. Da außerdem $y(x_0) = H^{-1}(G(x_0) + H(y_0)) = H^{-1}(H(y_0)) = y_0$ gilt, ist (2.2) tatsächlich eine Lösung von (2.1).

Es verbleibt nun noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei dazu $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (2.1) mit I wie oben. Wir betrachten die Menge

$$U := \{x \in I; y(x) = z(x)\}.$$

Dann ist $U \neq \emptyset$ und abgeschlossen. Außerdem ist U offen. Sei dazu $x_1 \in U$. Dann gilt $z(x_1) = y(x_1) \in J$ und aufgrund der Stetigkeit von z existiert $\varepsilon > 0$ mit

$$z(x) \in J \quad (x \in]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[=: I_\varepsilon)$$

und $I_\varepsilon \subseteq I$. Insbesondere ist $h(z(x)) > 0$ für alle $x \in I_\varepsilon$ und daher

$$\frac{z'(x)}{h(z(x))} = g(x) \quad (x \in I_\varepsilon).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^x g(r) \, dr &= \int_{x_1}^x \frac{z'(r)}{h(z(r))} \, dr \\ &= \int_{z(x_1)}^{z(x)} \frac{1}{h(s)} \, ds \\ &= H(z(x)) - H(z(x_1)) \\ &= H(z(x)) - H(y(x_1)) \quad (x \in I_\varepsilon). \end{aligned}$$

2. Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

Andererseits gilt

$$H(y(x)) - H(y(x_1)) = G(x) + H(y_0) = \int_{x_0}^x g(r) \, dr - \int_{x_0}^{x_1} g(r) \, dr = \int_{x_1}^x g(r) \, dr \quad (x \in I_\varepsilon)$$

und daher

$$H(z(x)) = H(y(x)) \quad (x \in I_\varepsilon).$$

Aus der Invertierbarkeit von H folgt

$$z(x) = y(x) \quad (x \in I_\varepsilon)$$

und damit $I_\varepsilon \subseteq U$. Damit ist $U = I$ nach Lemma 2.1. $\square$

Bemerkung 2.3. Die Anfangsbedingung in Satz 2.2 ist zwingend notwendig für die Eindeutigkeit der Lösung. In der Tat hat die Gleichung

$$y' = y$$

unendlich viele Lösungen, nämlich $y(x) = ce^x$ für $c \in \mathbb{R}$. Durch die Anfangsbedingung wird der Parameter c eindeutig festgelegt. Man spricht bei Aufgaben der Form (2.1) von einem *Anfangswertproblem (AWP)*.

Beispiel 2.4. Wir betrachten das AWP

$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1. \quad (2.3)$$

Auf dem Intervall $I_1 =]-1, 1[$ lässt sich diese DGL umschreiben zu

$$y' = -\frac{2x}{x^2 - 1}y^2. \quad (2.4)$$

Es ist also $g(x) = -\frac{2x}{x^2 - 1}$ und $h(y) = y^2$. Der Beweis von Satz 2.2 liefert nun ein Lösungsschema für dieses Problem. Es ist

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{s^2} \, ds = - \int_0^x \frac{2r}{r^2 - 1} \, dr$$

also

$$-\frac{1}{y(x)} + 1 = -\ln(|1 - x^2|)$$

und damit

$$y(x) = \frac{1}{\ln(|1 - x^2|) + 1} \quad (x \in]-\sqrt{1 - e^{-1}}, \sqrt{1 - e^{-1}}[).$$

2. Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

Satz 2.5 (Lineare DGL 1. Ordnung). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten die DGL

$$y' + g(x)y = h(x). \quad (2.5)$$

Dann gelten:

- (a) Sei $y_s : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (2.5). Dann ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann eine Lösung von (2.5), falls $y - y_s$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Problems

$$y' + g(x)y = 0 \quad (2.6)$$

ist.

- (b) Sei $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von g . Dann ist die Lösungsmenge von (2.6) gegeben durch

$$\left\{ x \mapsto ce^{-G(x)} ; c \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (c) Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Sei ferner $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von g . Dann ist

$$y(x) := e^{-G(x)+G(x_0)}y_0 + e^{-G(x)} \int_{x_0}^x e^{G(s)}h(s) \, ds \quad (x \in I) \quad (2.7)$$

die eindeutig bestimmte Lösung von (2.5) zum Anfangswert $y(x_0) = y_0$.

Beweis. (a) Sei y eine Lösung von (2.5). Dann ist $y_h := y - y_s$ eine Lösung von (2.6). Ist umgekehrt $y - y_s$ eine Lösung von (2.6), so gilt

$$y' + g(x)y = (y - y_s)' + g(x)(y - y_s) + y_s' + g(x)y_s = y_s' + g(x)y_s = h.$$

- (b) Ist $y(x) = ce^{-G(x)}$ für $x \in I$, so gilt

$$y'(x) = ce^{-G(x)}(-G'(x)) = -g(x)y(x),$$

also ist y eine Lösung des homogenen Problems. Umgekehrt, ist y eine Lösung von (2.6), dann gilt

$$\begin{aligned} \left(ye^{G(\cdot)} \right)'(x) &= y'(x)e^{G(x)} + y(x)e^{G(x)}g(x) \\ &= -g(x)y(x)e^{G(x)} + y(x)e^{G(x)}g(x) \\ &= 0 \quad (x \in I), \end{aligned}$$

also existiert $c \in \mathbb{R}$ mit

$$y(x)e^{G(x)} = c \quad (x \in I)$$

oder mit anderen Worten

$$y(x) = ce^{-G(x)} \quad (x \in I).$$

2. Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= -e^{-G(x)+G(x_0)}g(x)y_0 - e^{-G(x)}g(x) \int_{x_0}^x e^{G(s)}h(s) \, ds + e^{-G(x)}e^{G(x)}h(x) \\ &= -g(x)y(x) + h(x) \end{aligned}$$

für $x \in I$ und $y(x_0) = y_0$ und damit löst (2.7) das Anfangswertproblem. Existiert nun eine weitere Lösung z des AWP, so löst $z - y$ das homogene Problem nach (a) und besitzt damit die Form

$$z(x) - y(x) = ce^{-G(x)} \quad (x \in I)$$

für ein $c \in \mathbb{R}$ nach (b). Da nun $z(x_0) - y(x_0) = 0$, folgt $c = 0$, also $z = y$. □

Bemerkung 2.6. Die Formel (2.7) erhält man aus der so genannten Variation der Konstanten. Nach Satz 2.5 (b) hat das zugehörige homogene Problem die allgemeine Lösung

$$y(x) = ce^{-G(x)}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Als Ansatz für das inhomogene Problem wählt man nun

$$y(x) = c(x)e^{-G(x)}$$

mit einer geeigneten stetig differenzierbaren Funktion $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $c(x_0) = y_0e^{G(x_0)}$. Setzt man diesen Ansatz in die Gleichung ein, so erhält man

$$-c(x)e^{-G(x)}g(x) + h(x) = -g(x)y(x) + h(x) \stackrel{!}{=} y'(x) = c'(x)e^{-G(x)} - c(x)e^{-G(x)}g(x)$$

und damit

$$c'(x)e^{-G(x)} = h(x).$$

Daher ist

$$c'(x) = h(x)e^{G(x)},$$

also

$$c(x) - c(x_0) = \int_{x_0}^x c'(s) \, ds = \int_{x_0}^x h(s)e^{G(s)} \, ds.$$

Mit der Anfangsbedingung für c folgt nun

$$c(x) = e^{G(x_0)}y_0 + \int_{x_0}^x h(s)e^{G(s)} \, ds$$

und hieraus die Formel (2.7).

2. Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

Beispiel 2.7. Gesucht ist Lösungsmenge der DGL

$$y' = y + \sin x.$$

Wir lösen zunächst das homogene Problem

$$y' = y.$$

Dies hat die Lösungsmenge

$$\{x \mapsto ce^x; c \in \mathbb{R}\}.$$

Wir bestimmen eine Lösung des inhomogenen Problems über die Variation der Konstanten und setzen als Anfangsbedingung $y(0) = 0$. Der Ansatz $y(x) = c(x)e^x$ liefert

$$c'(x) = e^{-x} \sin x$$

und somit

$$\begin{aligned} c(x) &= \int_0^x e^{-s} \sin s \, ds \\ &= \operatorname{Im} \int_0^x e^{-(1-i)s} \, ds \\ &= -\operatorname{Im} \frac{1}{1-i} (e^{-(1-i)x} - 1) \\ &= -\operatorname{Im} \frac{1+i}{2} (e^{-x} e^{ix} - 1) \\ &= -\frac{1}{2} (e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x - 1). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als spezielle Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x - e^x)$$

und als Lösungsmenge

$$\left\{ x \mapsto ce^x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x - e^x); c \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Substitutionsmethoden

In diesem Kapitel stellen wir einige Typen von DGL vor, die sich durch Substitution zu einer DGL umformen lassen, die mit den Ergebnissen des letzten Kapitels behandelt werden können.

► DGL der Form $y' = f(y + ax)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Setze $z(x) := y(x) + ax$. Dann gilt

$$z'(x) = y'(x) + a = f(y(x) + ax) + a = f(z(x)) + a.$$

Diese löst man mit Satz 2.2 und erhält y per Rücksubstitution.

Beispiel 3.1. Wir betrachten $y' = (y + 2x)^2$ mit $y(0) = 0$. Über $z(x) = y(x) + 2x$ erhalten wir

$$z'(x) = z(x)^2 + 2, \quad z(0) = 0.$$

Trennung der Variablen liefert nun

$$\int_0^{z(x)} \frac{1}{s^2 + 2} \, ds = \int_0^x ds = x.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{s^2 + 2} \, ds &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{1}{\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} \, ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{b}{\sqrt{2}}} \frac{1}{r^2 + 1} \, dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) - \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \right) \end{aligned}$$

und daher

$$\arctan\left(\frac{z(x)}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}x,$$

also

$$z(x) = \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x) \quad \left(x \in \left] -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right[\right).$$

3. Substitutionsmethoden

Damit ist

$$y(x) = \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x) - 2x$$

die Lösung des AWP.

► Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Betrachte die DGL

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Mit $z(x) := \frac{y(x)}{x}$ folgt

$$z'(x) = \frac{y'(x)x - y(x)}{x^2} = \frac{y'(x) - z(x)}{x} = \frac{1}{x}(f(z(x)) - z(x)).$$

Diese ist lösbar mit Satz 2.2.

Beispiel 3.2. Betrachte das AWP $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2$ mit $y(1) = \frac{1}{3}$. Mit $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ folgt

$$z' = \frac{1}{x}(z^2 - z), \quad z(1) = \frac{1}{3}.$$

Trennung der Variablen liefert

$$\int_{\frac{1}{3}}^{z(x)} \frac{1}{s^2 - s} \, ds = \int_1^x \frac{1}{s} \, ds = \ln|x|.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{s^2 - s} \, ds &= \int_a^b -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \, ds \\ &= -\ln|b| + \ln|a| + \ln|b-1| - \ln|a-1| \\ &= \ln\left|\frac{b-1}{b}\right| - \ln\left|\frac{a-1}{a}\right|. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\ln\left|\frac{z(x)-1}{z(x)}\right| = \ln|x| + \ln 2 = \ln(2|x|)$$

und damit

$$|z(x) - 1| = 2|x||z(x)|.$$

In einer geeigneten Umgebung von $x = 1$ (so, dass $0 \leq z(x) \leq 1$ und $x \geq 0$) ergibt sich

$$1 - z(x) = 2xz(x)$$

3. Substitutionsmethoden

also

$$z(x) = \frac{1}{1+2x} \quad (x \in]0, \infty[).$$

Rücksubstitution liefert dann

$$y(x) = \frac{x}{1+2x} \quad (x \in]0, \infty[).$$

► Bernoullische Differentialgleichung

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Betrachte

$$y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0.$$

Wir setzen $z(x) := y(x)^{1-\alpha}$ und erhalten

$$\begin{aligned} z' &= (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \\ &= -(1-\alpha)y^{-\alpha}(f(x)y + g(x)y^\alpha) \\ &= -(1-\alpha)(f(x)z + g(x)). \end{aligned}$$

Diese DGL lässt sich nun mit Satz 2.5 lösen.

Beispiel 3.3. Betrachte das AWP

$$y' = ay - by^2, \quad y(0) = 1$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Die Substitution $z(x) = y(x)^{-1}$ liefert nun

$$z' = -az + b, \quad z(0) = 1.$$

Hieraus ergibt sich nach (2.7) in Satz 2.5

$$z(x) = e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{as} b \, ds = e^{-ax} + \frac{b}{a}(1 - e^{-ax}) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Rücksubstitution liefert

$$y(x) = \frac{1}{e^{-ax} + \frac{b}{a}(1 - e^{-ax})}$$

mit dem Definitionsbereich

$$D(y) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } \frac{a}{b} \geq 1, \\]\frac{1}{a} \ln(1 - \frac{a}{b}), \infty[& \text{falls } \frac{a}{b} < 1. \end{cases}$$

4. Exakte Differentialgleichungen

Definition. Seien $M, N : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei U offen sei. Wir betrachten die DGL

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0. \quad (4.1)$$

Diese Gleichung heißt *exakt*, falls es eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $\partial_1 \psi = M$ und $\partial_2 \psi = N$ gilt, oder äquivalent ausgedrückt

$$\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} = \text{grad } \psi.$$

Ist die obige DGL exakt, so gilt für stetig differenzierbare Funktionen $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $I \times y[I] \subseteq U$ und $\psi(x, y(x)) = c \in \mathbb{R}$ für alle $x \in I$:

$$0 = \psi(\cdot, y(\cdot))'(x) = \partial_1 \psi(x, y(x)) + \partial_2 \psi(x, y(x))y'(x) = M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x),$$

d.h. eine Lösung von (4.1) ist implizit über die Gleichung

$$\psi(x, y(x)) = c$$

gegeben. Kann man diese algebraische Gleichung nach $y(x)$ auflösen, so erhält man eine Lösung der DGL.

Beispiel 4.1. (a) Betrachte

$$2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0.$$

Diese DGL ist exakt. In der Tat gelten für $\psi(x, y) = x^2y^3$ die gewünschten Gleichheiten. Somit ist für $c \in \mathbb{R}$ durch

$$y(x) = \frac{c}{x^{\frac{2}{3}}} \quad (x \in (0, \infty))$$

eine Lösung der DGL gegeben.

(b) Betrachte

$$y' = g(x)h(y).$$

Ist $h(y) \neq 0$, so ist diese Gleichung äquivalent zu

$$g(x) - \frac{1}{h(y)}y' = 0.$$

Diese DGL ist exakt mit $\psi(x, y) = \int_{x_0}^x g(s) \, ds - \int_{y_0}^y \frac{1}{h(r)} \, dr$. Die Lösung entspricht genau der Lösung in Satz 2.2.

4. Exakte Differentialgleichungen

Es stellt sich nun die Frage, wann so eine Funktion ψ existiert und wie sie sich berechnen lässt.

Definition. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei ferner $F : \gamma[[0, 1]] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann definieren wir das *Wegintegral 2. Art von F entlang γ* durch

$$\int_{\gamma} F := \int_0^1 \langle F(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt.$$

Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ so definieren wir den *Weg* $\gamma := \gamma_1 \dot{+} \dots \dot{+} \gamma_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\gamma(t) = \gamma_i(mt - (i-1))$, falls $t \in [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$. Ferner definieren wir das Wegintegral 2. Art von F entlang γ durch

$$\int_{\gamma} F := \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} F.$$

Sei nun $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt F *konservativ*, falls für alle Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ gilt

$$\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F.$$

Satz 4.2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $F = \text{grad } \psi$ für ein stetig differenzierbares $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. F ist ein Potentialfeld.
- (ii) Für alle Wege $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt $\int_{\gamma} F = 0$.
- (iii) F ist konservativ.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$(\psi \circ \gamma)'(t) = \langle \text{grad } \psi(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle = \langle F(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle$$

für alle $t \in]0, 1[$ und damit

$$\int_{\gamma} F = \int_0^1 (\psi \circ \gamma)'(t) dt = \psi(\gamma(1)) - \psi(\gamma(0)).$$

Für einen Weg $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \dots \dot{+} \gamma_m$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt dann

$$\int_{\gamma} F = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} F = \sum_{i=1}^m \psi(\gamma_i(1)) - \psi(\gamma_i(0)) = \psi(\gamma_m(1)) - \psi(\gamma_1(0)) = \psi(\gamma(1)) - \psi(\gamma(0)) = 0.$$

4. Exakte Differentialgleichungen

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow U$ Wege mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Wir definieren $-\gamma_2(t) := \gamma_2(1 - t)$ und $\gamma := \gamma_1 \dot{+} (-\gamma_2)$. Dann gilt $\gamma(0) = \gamma(1)$ und damit

$$\int_{\gamma} F = 0.$$

Nach Definition gilt

$$0 = \int_{\gamma} F = \int_{\gamma_1} F + \int_{-\gamma_2} F = \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F$$

und damit ist F konservativ.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $x_0 \in U$ und betrachte die Menge

$$U_0 := \{x \in U ; \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow U \text{ Weg} : \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x\}.$$

Wir definieren

$$\psi(x) := \int_{\gamma} F \quad (x \in U_0),$$

wobei γ ein Weg von x_0 nach x sei (ψ ist wohldefiniert, da F konservativ). Wir zeigen nun, dass ψ differenzierbar ist. Sei dazu $x \in U_0$, $\varepsilon > 0$ so dass $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Sei $|s| < \varepsilon$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ und betrachte den Weg $\hat{\gamma}(t) := x + tse_i$. Dann verbindet $\gamma \dot{+} \hat{\gamma}$ die Punkte x_0 und $x + se_i$. Insbesondere ist $x + se_i \in U_0$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} (\psi(x + se_i) - \psi(x)) &= \frac{1}{s} \left(\int_{\gamma \dot{+} \hat{\gamma}} F - \int_{\gamma} F \right) \\ &= \frac{1}{s} \int_{\hat{\gamma}} F \\ &= \frac{1}{s} \int_0^1 \langle F(\hat{\gamma}(t)) | \hat{\gamma}'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 F_i(x + tse_i) dt \rightarrow F_i(x) \quad (s \rightarrow 0), \end{aligned}$$

also $\partial_i \psi(x) = F_i(x)$, oder äquivalent $F(x) = \text{grad } \psi(x)$. Ist $U = U_0$, dann ist nichts mehr zu tun. Sonst wiederholen wir das Verfahren für $x_0 \in U \setminus U_0$ (beachte: $U \setminus U_0$ ist offen). $\square$

Ist ψ sogar zweimal stetig differenzierbar, so gilt nach dem Lemma von Schwarz für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$

$$\partial_k F_j = \partial_k \partial_j \psi = \partial_j \partial_k \psi = \partial_j F_k. \quad (4.2)$$

4. Exakte Differentialgleichungen

Man spricht von der so genannten *Integrabilitätsbedingungen*. Die Frage ist nun, ob diese Bedingung auch hinreichend ist. Das dies im Allgemeinen nicht der Fall ist, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 4.3. Sei $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\partial_2 F_1(x, y) = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

sowie

$$\partial_1 F_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Somit erfüllt F die Integrabilitätsbedingungen. Allerdings gilt für $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_0^1 \langle F(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt \\ &= 2\pi \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

und somit ist F nicht konservativ und damit auch kein Potentialfeld nach Satz 4.2.

Satz 4.4. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig (d.h. $\exists x^* \in U \forall x \in U, t \in [0, 1] : (1-t)x^* + tx \in U$). Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Erfüllt F die Integrabilitätsbedingungen, so ist F ein Potentialfeld.

Bemerkung 4.5. Im obigen Beispiel ist die Menge $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht sternförmig. Man kann die Bedingung etwas abschwächen und durch *einfach zusammenhängend* ersetzen (siehe Literatur).

Um Satz 4.4 beweisen zu können, benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

Lemma 4.6. Sei $f :]a, b[\times]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und stetig differenzierbar nach der ersten Variable. Dann ist die Funktion $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

4. Exakte Differentialgleichungen

stetig differenzierbar mit

$$g'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x, y) \, dy.$$

Beweis. Sei $x \in]a, b[$ und $h_0 > 0$ so, dass $[x - h_0, x + h_0] \subseteq]a, b[$. Die Funktion $\partial_1 f$ ist stetig nach Voraussetzung und daher ist

$$\partial_1 f : [x - h_0, x + h_0] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $0 < \delta < h_0$, so dass für alle $|h| < \delta$ gilt

$$|\partial_1 f(x + h, y) - \partial_1 f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{d - c} \quad (y \in [c, d]).$$

Damit gilt für $|h| < \delta$ und $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} (g(x + h) - g(x)) - \int_c^d \partial_1 f(x, y) \, dy \right| &= \left| \int_c^d \frac{1}{h} (f(x + h, y) - f(x, y)) - \partial_1 f(x, y) \, dy \right| \\ &= \left| \int_c^d \partial_1 f(\xi(y), y) - \partial_1 f(x, y) \, dy \right| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei $\xi(y) \in]x - |h|, x + |h|[$ gemäß Mittelwertsatz geeignet gewählt sei. Damit ist g differenzierbar mit

$$g'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x, y) \, dy.$$

Die Stetigkeit von g' folgt aus

$$|g'(x + h) - g'(x)| \leq \int_c^d |\partial_1 f(x + h, y) - \partial_1 f(x, y)| \, dy < \varepsilon$$

für $|h| < \delta$. □

Beweis von Satz 4.4. Sei x^* wie in der Voraussetzung. Wir setzen

$$\psi(x) := \int_0^1 \langle F((1 - t)x^* + tx) | x - x^* \rangle \, dt \quad (x \in U).$$

4. Exakte Differentialgleichungen

Sei $x \in U$ und $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ erfüllt die Funktion

$$\begin{aligned} f :] - \varepsilon, \varepsilon[\times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, t) &\mapsto \langle F((1-t)x^* + t(x + se_i)) | (x + se_i) - x^* \rangle \end{aligned}$$

die Voraussetzung von Lemma 4.6 mit

$$\begin{aligned} \partial_1 f(0, t) &= \langle F'((1-t)x^* + tx)te_i | x - x^* \rangle + \langle F((1-t)x^* + tx) | e_i \rangle \\ &= t \left\langle \begin{pmatrix} \partial_1 F_1((1-t)x^* + tx) \\ \vdots \\ \partial_i F_n((1-t)x^* + tx) \end{pmatrix} \middle| x - x^* \right\rangle + \langle F((1-t)x^* + tx) | e_i \rangle \\ &= t \left\langle \begin{pmatrix} \partial_1 F_i((1-t)x^* + tx) \\ \vdots \\ \partial_n F_i((1-t)x^* + tx) \end{pmatrix} \middle| x - x^* \right\rangle + F_i((1-t)x^* + tx) \\ &= (r \mapsto rF_i(x^* + r(x - x^*)))'(t) \end{aligned}$$

für $t \in [0, 1]$ und somit gilt (beachte $g(s) = \psi(x + se_i)$)

$$\partial_i \psi(x) = g'(0) = \int_0^1 \partial_1 f(0, t) \, dt = F_i(x). \quad \square$$

Korollar 4.7. Seien $M, N : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, wobei U offen und sternförmig sei. Die DGL

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

ist genau dann exakt, wenn

$$\partial_2 M(x, y) = \partial_1 N(x, y).$$

Beispiel 4.8. (a) Wir betrachten wieder

$$2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0,$$

also $M, N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $M(x, y) = 2xy^3$ und $N(x, y) = 3x^2y^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_2 M(x, y) &= 6xy^2 \\ \partial_1 N(x, y) &= 6xy^2 \end{aligned}$$

und somit ist die DGL exakt. Zur Bestimmung von ψ kann man nun Wegintegrale verwenden (vgl. Beweis von Satz 4.2 (iii) $\Rightarrow$ (i)). Alternativ liest man aus

$$\partial_1 \psi(x, y) = M(x, y) = 2xy^3$$

ab, dass

$$\psi(x, y) = x^2y^3 + h(y)$$

4. Exakte Differentialgleichungen

für eine geeignete Funktion h gilt. Daraus erhält man

$$\partial_2 \psi(x, y) = 3x^2 y^2 + h'(y) \stackrel{!}{=} N(x, y) = 3x^2 y^2$$

und daher

$$h'(y) = 0$$

also z.B. $h(y) = 0$.

(b) Wir betrachten die DGL

$$xy^3 + (1 + 2x^2 y^2)y' = 0, \quad (4.3)$$

also $M, N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $M(x, y) = xy^3$ und $N(x, y) = 1 + 2x^2 y^2$. Es gilt

$$\partial_2 M(x, y) = 3xy^2,$$

$$\partial_1 N(x, y) = 4xy^2$$

also ist die DGL nicht exakt. Um dennoch eine exakte DGL zu erhalten, können wir (4.3) mit einer geeigneten Funktion μ multiplizieren, also

$$\underbrace{\mu(x, y)xy^3}_{=: \widetilde{M}(x, y)} + \underbrace{\mu(x, y)(1 + 2x^2 y^2)}_{=: \widetilde{N}(x, y)} y' = 0$$

mit der Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned} \partial_2 \mu(x, y)M(x, y) + \mu(x, y)\partial_2 M(x, y) &= \partial_2 \widetilde{M}(x, y) \\ &\stackrel{!}{=} \partial_1 \widetilde{N}(x, y) \\ &= \partial_1 \mu(x, y)N(x, y) + \mu(x, y)\partial_1 N(x, y) \end{aligned}$$

gilt. So eine Funktion μ nennt man *integrierender Faktor* (auch *Euler-Faktor*). Im Allgemeinen ist es sehr schwer, so ein μ zu bestimmen. Stattdessen versucht man einfache Ansätze, z.B. $\partial_2 \mu(x, y) = 0$ oder $\partial_1 \mu(x, y) = 0$, d.h. μ hängt nicht von y bzw. x ab. Dadurch vereinfacht sich die geforderte Integrabilitätsbedingungen zu

$$\mu(x)\partial_2 M(x, y) = \mu'(x)N(x, y) + \mu(x)\partial_1 N(x, y)$$

bzw. zu

$$\mu'(y)M(x, y) + \mu(y)\partial_2 M(x, y) = \mu(y)\partial_1 N(x, y).$$

Dies ergibt einerseits

$$\mu'(x) = \mu(x) \frac{\partial_2 M(x, y) - \partial_1 N(x, y)}{N(x, y)}$$

oder andererseits

$$\mu'(y) = \mu(y) \frac{\partial_1 N(x, y) - \partial_2 M(x, y)}{M(x, y)}.$$

4. Exakte Differentialgleichungen

Insbesondere dürfen die Terme

$$\frac{\partial_2 M(x, y) - \partial_1 N(x, y)}{N(x, y)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial_1 N(x, y) - \partial_2 M(x, y)}{M(x, y)}$$

nicht von y bzw. x abhängen, damit dieser Ansatz Erfolg haben kann. Im obigen Beispiel gilt

$$\frac{\partial_2 M(x, y) - \partial_1 N(x, y)}{N(x, y)} = \frac{3xy^2 - 4xy^2}{1 + 2x^2y^2},$$

sowie

$$\frac{\partial_1 N(x, y) - \partial_2 M(x, y)}{M(x, y)} = \frac{4xy^2 - 3xy^2}{xy^3} = \frac{1}{y}.$$

Damit können wir einen integrierenden Faktor μ mithilfe der DGL

$$\mu'(y) = \frac{1}{y}\mu(y)$$

bestimmen. Als mögliche Lösung erhalten wir

$$\mu(y) = y$$

und daher

$$\widetilde{M}(x, y) = xy^4 \quad \text{und} \quad \widetilde{N}(x, y) = y + 2x^2y^3.$$

In der Tat gilt nun

$$\partial_2 \widetilde{M}(x, y) = 4xy^3 = \partial_1 \widetilde{N}(x, y).$$

Das zugehörige Potential ψ erfüllt

$$\partial_1 \psi(x, y) \stackrel{!}{=} xy^4 \Rightarrow \psi(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^4 + h(y)$$

und daher

$$2x^2y^3 + h'(y) = \partial_2 \psi(x, y) \stackrel{!}{=} y + 2x^2y^3 \Rightarrow h'(y) = y$$

also z.B. $h(y) = \frac{1}{2}y^2$ und somit

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2y^4 + y^2)$$

und die Lösungen von (4.3) sind implizit über die Beziehung

$$c = \frac{1}{2}(x^2y(x)^4 + y(x)^2)$$

gegeben.

Teil II.

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

5. Banachräume stetiger Funktionen

Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Wir definieren die folgende Menge

$$C_b(M; \mathbb{K}^n) := \{f : M \rightarrow \mathbb{K}^n; f \text{ stetig und beschränkt}\}.$$

Offenbar ist diese Menge ein Vektorraum mit den üblichen punktweisen Operationen. Ferner definieren wir auf diesem Raum die Norm (!)

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in M} |f(x)| \quad (f \in C_b(M; \mathbb{K}^n)).$$

Satz 5.1. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann ist der Raum $(C_b(M; \mathbb{K}^n), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig, also ein Banachraum.

Beweis. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C_b(M; \mathbb{K}^n)$. Dann gilt für alle $x \in M$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

und somit ist $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$, also konvergent. Wir setzen

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Wir zeigen nun: $f \in C_b(M; \mathbb{K}^n)$ und $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$. Sei dazu $x \in M$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad (n, m \geq N)$$

gilt. Für $x \in M$ gibt es $N_1 \in \mathbb{N}$ so dass

$$|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (m \geq N_1).$$

Setze $m := \max\{N, N_1\}$. Damit gilt für alle $n \geq N$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon + \|f_n - f_m\|_\infty < 2\varepsilon.$$

Da dies für alle $x \in M$ gilt, folgt

$$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

5. Banachräume stetiger Funktionen

Wir zeigen nun, dass f stetig und beschränkt ist. Sei dazu $x \in M$ und wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Da f_n stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Damit gilt für alle $y \in M$ mit $d(x, y) < \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < 3\varepsilon,$$

also ist f stetig. Außerdem gilt für alle $x \in M$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \varepsilon + \|f_n\|_\infty,$$

also ist f beschränkt. □

Bemerkung 5.2. Sei $M = [a, b]$. Dann ist

$$C_b([a, b]; \mathbb{K}^n) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n \mid f \text{ stetig}\} =: C([a, b]; \mathbb{K}^n)$$

nach dem Satz vom Maximum.

Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Dann heißt A *folgenkompakt* in M , falls jede Folge in A eine in M konvergente Teilfolge besitzt (der Grenzwert muss also nicht zu A gehören).

6. Der Satz von Arzelà-Ascoli

Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Dann heißt A *folgenkompakt* in M , falls jede Folge in A eine in M konvergente Teilfolge besitzt (der Grenzwert muss also nicht zu A gehören).

Lemma 6.1. Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq M$. Dann sind äquivalent:

- (i) A ist folgenkompakt in M ,
- (ii) für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq A$ mit $A \subseteq \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$.

Beweis. Wir zeigen (i) $\Rightarrow$ (ii) über Kontraposition, d.h. $\neg(\text{ii}) \Rightarrow \neg(\text{i})$. Gilt (ii) nicht, so existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass für alle endlichen Teilmengen $F \subseteq A$ gilt

$$A \setminus \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Wir definieren nun rekursiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A . Wir wählen $x_1 \in A$ beliebig. Sind $x_1, \dots, x_n$ gewählt, so gilt nach Voraussetzung

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset$$

und somit existiert $x_{n+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. Nach Konstruktion gilt für diese Folge

$$d(x_{n+1}, x_i) > \varepsilon \quad (i \leq n).$$

Damit kann diese Folge keine konvergente Teilfolge besitzen und A ist somit nicht folgenkompakt in M .

Wir zeigen nun (ii) $\Rightarrow$ (i). Wir zeigen zunächst

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ Teilfolge } \forall k, \ell \in \mathbb{N} : d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) < \varepsilon. \quad (6.1)$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A . Nach Voraussetzung gibt es eine endliche Menge $F \subseteq A$ mit

$$\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq A \subseteq \bigcup_{x \in F} B(x, \frac{\varepsilon}{2}).$$

6. Der Satz von Arzelà-Ascoli

Insbesondere muss es unendlich viele Indizes $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ geben, mit $x_{n_k} \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ für ein $x \in F$ (beachte: F endlich). Dann gilt

$$d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) \leq d(x_{n_k}, x) + d(x, x_{n_\ell}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (k, \ell \in \mathbb{N}).$$

Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A . Wir wählen eine Teilfolge $(x_{n_k}^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$ gemäß (6.1) mit $\varepsilon = 1$. Rekursiv definieren wir nun Teilfolgen $(x_{n_k}^{(j+1)})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_{n_k}^{(j)})_{k \in \mathbb{N}}$ gemäß (6.1) für $\varepsilon = \frac{1}{j+1}$. Wir definieren nun die Folge (Diagonalfolge)

$$x_{n_k} := x_{n_k}^{(k)} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Für diese Folge gilt

$$d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) = d(x_{n_k}^{(k)}, x_{n_\ell}^{(\ell)}) \leq \frac{1}{k} \quad (k \leq \ell)$$

und sie ist somit eine Cauchy-Folge. Da M vollständig ist, besitzt sie einen Grenzwert und A ist daher folgenkompakt in M . $\square$

Satz 6.2 (Arzelà-Ascoli). *Sei $A \subseteq C([a, b]; \mathbb{K}^n)$. Dann sind äquivalent*

- (i) *A ist folgenkompakt in $C([a, b]; \mathbb{K}^n)$,*
- (ii) (a) *für alle $x \in [a, b]$ ist $\{f(x); f \in A\} \subseteq \mathbb{K}^n$ beschränkt, und*
 (b) *A ist gleichgradig stetig, d.h.*

$$\forall x \in [a, b], \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in A, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Annahme: (a) gilt nicht. Dann existiert ein $x \in [a, b]$ mit $\{f(x); f \in A\}$ unbeschränkt. Damit existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit

$$|f_n(x)| > n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Diese Folge kann keine in $C([a, b]; \mathbb{K}^n)$ konvergente Teilfolge enthalten (beachte: Konvergenz in $C([a, b]; \mathbb{K}^n)$ impliziert punktweise Konvergenz). Widerspruch!
 Annahme: (b) gilt nicht. Dann existieren $x \in [a, b]$ und $\varepsilon > 0$, so dass

$$\forall \delta > 0 \exists f \in A, y \in B(x, \delta) : |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

Insbesondere existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists y_n \in B(x, \frac{1}{n}) : |f_n(x) - f_n(y_n)| > \varepsilon.$$

Sei nun $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $f \in C([a, b]; \mathbb{K}^n)$. Da f stetig ist und $y_{n_k} \rightarrow x$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(x) - f(y_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (k \geq K).$$

6. Der Satz von Arzelà-Ascoli

Außerdem existiert ein $\tilde{K} \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f - f_{n_k}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \quad (k \geq \tilde{K}).$$

Damit gilt für $k \geq \max\{K, \tilde{K}\}$

$$\begin{aligned} \varepsilon &< |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y_{n_k})| \\ &\leq |f_{n_k}(x) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})| + |f(y_{n_k}) - f_{n_k}(y_{n_k})| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 2\|f - f_{n_k}\|_\infty < \varepsilon. \end{aligned}$$

Widerspruch!

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nach Lemma 6.1 reicht es zu zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $F \subseteq A$ endlich existiert mit

$$A \subseteq \bigcup_{g \in F} B(g, \varepsilon).$$

Sei also $\varepsilon > 0$. Nach (b) existiert für jedes $x \in [a, b]$ ein $\delta_x > 0$ so dass

$$\forall y \in B(x, \delta_x), f \in A : |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es gilt offenbar $[a, b] \subseteq \bigcup_{x \in [a, b]} B(x, \delta_x)$ und da $[a, b]$ kompakt ist, existieren $x_1, \dots, x_m \in [a, b]$ mit $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \delta_{x_i})$. Betrachte nun die Menge

$$M := \{(f(x_1), \dots, f(x_m)) ; f \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{m \cdot n}.$$

Diese ist nach (a) beschränkt und damit folgenkompakt in $\mathbb{K}^{m \cdot n}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß. Somit existiert nach Lemma 6.1 $F \subseteq A$ endlich mit

$$M \subseteq \bigcup_{g \in F} B((g(x_1), \dots, g(x_m)), \frac{\varepsilon}{3}).$$

Sei nun $f \in A$. Dann existiert ein $g \in F$ mit

$$|g(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (i \in \{1, \dots, m\}).$$

Sei nun $x \in [a, b]$. Dann existiert ein $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $|x - x_i| < \delta_{x_i}$. Damit gilt

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| < \varepsilon,$$

also

$$\|f - g\|_\infty < \varepsilon.$$

Das beweist

$$A \subseteq \bigcup_{g \in F} B(g, \varepsilon).$$

□

7. Der Existenzsatz von Peano

Lemma 7.1. Sei $f : U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig und sei $(x_0, y_0) \in U$. Sei ferner $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit $x_0 \in I$. Dann sind äquivalent:

(i) y löst das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

(ii) y ist stetig, $\{(x, y(x)) ; x \in I\} \subseteq U$ und es gilt

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) \, ds \quad (x \in I).$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Es gilt: y ist stetig, $\{(x, y(x)) ; x \in I\} \subseteq U$ nach Definition von Lösung. Außerdem gilt

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x y'(s) \, ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) \, ds \quad (x \in I)$$

nach Hauptsatz.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nach Hauptsatz ist y stetig differenzierbar mit

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (x \in I).$$

Außerdem gilt per Definition $y(x_0) = y_0$. Somit löst y das AWP. $\square$

Satz 7.2 (Peano). Seien $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{K}^n$ und $a, b > 0$. Sei ferner $f : [x_0, x_0 + a] \times B[y_0, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig mit

$$\|f\|_{\infty} a \leq b.$$

Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine Lösung $y : [x_0, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{K}^n$.

7. Der Existenzsatz von Peano

Beweis. Seien o.E. $x_0 = 0, y_0 = 0, a = 1$. Wir definieren rekursiv die folgenden Funktionen $\varphi_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}^n$ durch

$$\begin{aligned}\varphi_k(0) &:= 0, \\ \varphi_k(x) &:= \varphi_k\left(\frac{j}{k}\right) + \left(x - \frac{j}{k}\right) f\left(\frac{j}{k}, \varphi_k\left(\frac{j}{k}\right)\right) \quad \left(x \in \left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right], j \in \{0, \dots, k-1\}\right).\end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst induktiv, dass $|\varphi_k(x)| \leq \|f\|_\infty x$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, 1]$ (damit ist φ_k insbesondere wohldefiniert, da $|\varphi_k(x)| \leq \|f\|_\infty \leq b$ folgt). Für $x = 0$ gilt dies offensichtlich. Wir nehmen nun an, dass die Ungleichung für $x = \frac{j}{k}$ gilt. Dann folgt für $x \in \left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right]$

$$|\varphi_k(x)| \leq \left| \varphi_k\left(\frac{j}{k}\right) + \left(x - \frac{j}{k}\right) f\left(\frac{j}{k}, \varphi_k\left(\frac{j}{k}\right)\right) \right| \leq \|f\|_\infty \frac{j}{k} + \left(x - \frac{j}{k}\right) \|f\|_\infty = x \|f\|_\infty.$$

Wir zeigen nun, dass $\{\varphi_k; k \in \mathbb{N}\}$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzelà-Ascoli erfüllt.

(a) Für $x \in [0, 1]$ gilt $\{\varphi_k(x); k \in \mathbb{N}\} \subseteq B[0, b]$.

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right]$ gilt

$$|\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| \leq \|f\|_\infty |x - y|$$

und somit auch

$$|\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| \leq \|f\|_\infty |x - y| \quad (x, y \in [0, 1]).$$

Damit existiert eine konvergente Teilfolge $(\varphi_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\varphi \in C([0, 1])$. Wir zeigen nun, dass φ das AWP löst. Da nach (a) $\varphi_k(x) \in B[0, b]$ für alle $k \in \mathbb{N}, x \in [0, 1]$ gilt, folgt hiermit

$$\varphi(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{k_j}(x) \in B[0, b] \quad (x \in [0, 1])$$

und daher $\{(x, \varphi(x)); x \in [0, 1]\} \subseteq [0, 1] \times B[0, b]$. Somit genügt es nach Lemma 8.1 zu zeigen, dass

$$\varphi(x) = \int_0^x f(s, \varphi(s)) \, ds \quad (x \in [0, 1]).$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit

$$|x - x'|, |y - y'| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$$

für alle $(x, y), (x', y') \in [0, 1] \times B[0, b]$. Sei nun $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \min\{\delta, \frac{\delta}{\|f\|_\infty}\}$. Dann gilt für $k \geq N$ und $x \in \left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right]$

$$\left| \varphi_k(x) - \int_0^x f(s, \varphi_k(s)) \, ds \right|$$

7. Der Existenzsatz von Peano

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \varphi_k(x) - \varphi_k\left(\frac{j}{k}\right) - \int_{\frac{j}{k}}^x f(s, \varphi_k(s)) \, ds \right| + \left| \varphi_k\left(\frac{j}{k}\right) - \int_0^{\frac{j}{k}} f(s, \varphi_k(s)) \, ds \right| \\
&\leq \left| \varphi_k(x) - \varphi_k\left(\frac{j}{k}\right) - \int_{\frac{j}{k}}^x f(s, \varphi_k(s)) \, ds \right| + \sum_{i=0}^{j-1} \left| \varphi_k\left(\frac{i+1}{k}\right) - \varphi_k\left(\frac{i}{k}\right) - \int_{\frac{i}{k}}^{\frac{i+1}{k}} f(s, \varphi_k(s)) \, ds \right| \\
&\leq \int_{\frac{j}{k}}^x \left| f\left(\frac{j}{k}, \varphi_k\left(\frac{j}{k}\right)\right) - f(s, \varphi_k(s)) \right| \, ds + \sum_{i=0}^{j-1} \int_{\frac{i}{k}}^{\frac{i+1}{k}} \left| f\left(\frac{i}{k}, \varphi_k\left(\frac{i}{k}\right)\right) - f(s, \varphi_k(s)) \right| \, ds \\
&< \varepsilon x \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da nun $\varphi_{k_j}(x) \rightarrow \varphi(x)$ und $\int_0^x f(s, \varphi_{k_j}(s)) \, ds \rightarrow \int_0^x f(s, \varphi(s)) \, ds$ für $j \rightarrow \infty$ (Übung !) folgt

$$\left| \varphi(x) - \int_0^x f(s, \varphi(s)) \, ds \right| \leq \varepsilon \quad (x \in [0, 1])$$

und da ε beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 7.3. (a) Die Bedingung $a\|f\|_\infty \leq b$ ist durch Verkleinerung von a immer zu erreichen. Der Satz besagt also, dass für stetige Funktionen f stets eine Lösung des AWP in einer kleinen Umgebung von x_0 existiert.

(b) Der Existenzsatz von Peano liefert keine Eindeutigkeit der Lösung. Diese ist auch nicht zu erwarten, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0.$$

Offenbar löst $y(x) = 0$ dieses AWP. Allerdings ist $y(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ebenfalls eine Lösung.

8. Eindeutigkeit von Lösungen und der Satz von Picard-Lindelöf

Satz 8.1. Seien $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{K}^n$ und $a, b > 0$. Sei ferner $f : [x_0, x_0 + a] \times B[y_0, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig mit der Eigenschaft

$$\exists c \geq 0 \forall x \in [x_0, x_0 + a], y, z \in B[y_0, b] : \operatorname{Re} \langle f(x, y) - f(x, z) | y - z \rangle_{\mathbb{K}^n} \leq c |y - z|_{\mathbb{K}^n}^2. \quad (8.1)$$

Seien ferner $\varphi, \psi : [x_0, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{K}^n$ Lösungen des AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Dann gilt $\varphi = \psi$.

Beweis. Wir definieren die Funktion

$$\begin{aligned} \tau(x) &:= \frac{1}{2} |(\varphi(x) - \psi(x)) e^{-cx}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\varphi_i(x) - \psi_i(x)) \overline{(\varphi_i(x) - \psi_i(x))} e^{-2cx} \quad (x \in [x_0, x_0 + a]). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \tau'(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e^{-2cx} \left((\varphi'_i(x) - \psi'_i(x)) \overline{(\varphi_i(x) - \psi_i(x))} + (\varphi_i(x) - \psi_i(x)) \overline{(\varphi'_i(x) - \psi'_i(x))} - \right. \\ &\quad \left. - 2c (\varphi_i(x) - \psi_i(x)) \overline{(\varphi_i(x) - \psi_i(x))} \right) \\ &= e^{-2cx} (\operatorname{Re} \langle \varphi'(x) - \psi'(x) | \varphi(x) - \psi(x) \rangle - c |\varphi(x) - \psi(x)|^2) \\ &= e^{-2cx} (\operatorname{Re} \langle f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x)) | \varphi(x) - \psi(x) \rangle - c |\varphi(x) - \psi(x)|^2) \\ &\leq e^{-2cx} (c |\varphi(x) - \psi(x)|^2 - c |\varphi(x) - \psi(x)|^2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

für alle $x \in]x_0, x_0 + a[$ und somit ist τ monoton fallend auf $[x_0, x_0 + a]$. Da $\tau \geq 0$ und $\tau(x_0) = 0$, folgt $\tau(x) = 0$ für alle $x \in [x_0, x_0 + a]$, also $\varphi = \psi$. $\square$

Bemerkung 8.2. In $\mathbb{R}^1$ besagt die Bedingung (9.1), dass $y \mapsto f(x, y) - cy$ monoton fallend für alle x ist.

8. Eindeutigkeit von Lösungen und der Satz von Picard-Lindelöf

Korollar 8.3 (Picard-Lindelöf, lokale Version). *Seien I ein kompaktes Intervall, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}^n$ $b > 0$. Sei ferner $f : I \times B[y_0, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig mit*

$$\|f\|_\infty |I| \leq b.$$

Ferner genüge f einer Lipschitz-Bedingung bzgl. der 2. Variablen, d.h.

$$\exists c \geq 0 \forall x \in I, y, z \in B[y_0, b] : |f(x, y) - f(x, z)| \leq c|y - z|.$$

Dann besitzt das AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Beweis. Sei o.E. $x_0 = 0, y_0 = 0, I = [-a_0, a_1]$ für $a_0, a_1 \geq 0$.

Existenz: Aus dem Satz von Peano (Satz 8.2) folgt die Existenz einer Lösung $\varphi_1 : [0, a_1] \rightarrow \mathbb{K}^n$ des AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 0. \tag{8.2}$$

Betrachten wir nun die Funktion

$$\tilde{f}(x, y) := -f(-x, y) \quad (x \in [0, a_0], y \in B[0, b]).$$

Dann besitzt das AWP

$$y' = \tilde{f}(x, y), \quad y(0) = 0 \tag{8.3}$$

ebenfalls eine Lösung $\varphi_2 : [0, a_1] \rightarrow \mathbb{K}^n$. Setzen wir nun

$$\varphi(x) := \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{falls } x \in [0, a_1], \\ \varphi_2(-x) & \text{falls } x \in [-a_0, 0], \end{cases}$$

so erhalten wir eine stetige Funktion mit $\varphi(x) = 0$. Ebenso gilt für $x \in]-a_0, 0[$

$$\varphi'(x) = -\varphi_2'(-x) = -\tilde{f}(-x, \varphi_2(-x)) = f(x, \varphi(x)).$$

Es verbleibt die Gültigkeit der DGL in 0 zu zeigen. Es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\varphi_1(h) - \varphi_1(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \int_0^h f(x, \varphi_1(x)) \, dx = f(0, 0)$$

und ebenso

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\varphi_2(-h) - \varphi_2(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{1}{h} \int_0^{-h} \tilde{f}(x, \varphi_2(x)) \, dx = -\tilde{f}(0, 0) = f(0, 0).$$

Damit löst φ das AWP.

Eindeutigkeit: Ist $\varphi : [-a_0, a_1] \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine Lösung, so lösen $\varphi_1(x) := \varphi(x)$ für $x \in [0, a_1]$

8. Eindeutigkeit von Lösungen und der Satz von Picard-Lindelöf

und $\varphi_2(x) := \varphi(-x)$ für $x \in [0, a_0]$ die AWP (9.2) bzw. (9.3). Somit genügt es also zu zeigen, dass diese Lösungen eindeutig bestimmt sind. Es gilt für $x \in [0, a_1]$ und $y, z \in B[0, b]$

$$\langle f(x, y) - f(x, z) | y - z \rangle \leq |f(x, y) - f(x, z)| |y - z| \leq c |y - z|^2$$

und für $x \in [0, a_0]$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(x, z) | y - z \rangle &= \langle f(-x, z) - f(-x, y) | y - z \rangle \\ &\leq |f(-x, z) - f(-x, y)| |y - z| \\ &\leq c |y - z|^2 \end{aligned}$$

nach Cauchy-Schwarz'scher Ungleichung und somit folgt die Behauptung aus Satz 9.1. $\square$

Bemerkung 8.4. Die lokale Variante des Satzes von Picard-Lindelöf lässt sich auch ohne den Satz von Peano beweisen.

Wir wollen nun noch eine globale Variante dieses Satzes zeigen, in der wir die Bedingung $\|f\|_\infty a \leq b$ weglassen wollen. Dazu benötigen wir den Banach'schen Fixpunktsatz.

Satz 8.5 (Banach'scher Fixpunktsatz). *Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : M \rightarrow M$ eine strikte Kontraktion, d.h.*

$$\exists q \in [0, 1[\forall x, y \in M : d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y).$$

Dann existiert genau ein $x^ \in M$ mit $f(x^*) = x^*$. Ferner gilt für alle $x \in M$*

$$f^n(x) \rightarrow x^* \quad (n \rightarrow \infty).$$

Satz 8.6 (Picard-Lindelöf, globale Variante). *Sei I ein kompaktes Intervall, $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{K}^n$ und $f : I \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig. Ferner genüge f einer Lipschitz-Bedingung bezüglich der 2. Variablen, d.h.*

$$\exists c \geq 0 \forall x \in I, y, z \in \mathbb{K}^n : |f(x, y) - f(x, z)| \leq c |y - z|.$$

Dann besitzt das AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$.

8. Eindeutigkeit von Lösungen und der Satz von Picard-Lindelöf

Beweis. Nach Lemma 8.1 löst φ das AWP genau dann, wenn

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) \, ds \quad (x \in I)$$

gilt. Wir definieren die Funktion

$$P : C(I; \mathbb{K}^n) \rightarrow C(I; \mathbb{K}^n)$$

durch

$$(P(g))(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(s, g(s)) \, ds \quad (x \in I).$$

Somit löst φ das AWP genau dann, wenn

$$P(\varphi) = \varphi.$$

Es genügt also zu zeigen, dass Φ einen eindeutigen Fixpunkt besitzt. Dazu versehen wir $C(I)$ mit der zu $\|\cdot\|_\infty$ äquivalenten Norm (!)

$$\|g\| := \sup_{x \in I} |g(x)| e^{-dx}$$

für ein $d > c$. Wir weisen nun die Bedingungen des Banach'schen Fixpunktsatzes für P nach. Es gilt für $g, h \in C(I)$

$$\begin{aligned} |(P(g))(x) - (P(h))(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, g(s)) \, ds - \int_{x_0}^x f(s, h(s)) \, ds \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(s, g(s)) - f(s, h(s))| \, ds \\ &\leq c \int_{x_0}^x |g(s) - h(s)| \, ds \\ &\leq c \|g - h\| \int_{x_0}^x e^{ds} \, ds \\ &\leq \frac{c}{d} \|g - h\| e^{dx} \end{aligned}$$

und damit

$$\|P(g) - P(h)\| \leq \frac{c}{d} \|g - h\|.$$

Damit besitzt P einen eindeutigen Fixpunkt. □

8. Eindeutigkeit von Lösungen und der Satz von Picard-Lindelöf

Bemerkung 8.7. Mithilfe der Abbildung P lässt sich die Lösung des AWP rekursiv bestimmen. Nach Satz 9.5 gilt

$$P^n(g) \rightarrow y \quad (n \rightarrow \infty)$$

für jedes $g \in C(I; \mathbb{R}^n)$. Für $g = 0$ nennt man die Funktionen $P^n(0)$ die *Picard-Iterierten*.

Beispiel 8.8. (a) Betrachte das AWP

$$y' = \sin y, \quad y(x_0) = y_0$$

für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Dann erfüllt

$$\begin{aligned} f : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sin y \end{aligned}$$

die Voraussetzung von Satz 9.6 für jedes kompakte Intervall I mit $x_0 \in I$. In der Tat gilt mit Mittelwertsatz

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |\sin(y) - \sin(z)| = |\cos(\xi)| |y - z| \leq |y - z|$$

für alle $x \in I, y, z \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}$ geeignet. Somit besitzt das AWP eine eindeutige Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes kompakte Intervall I .

(b) Betrachte das AWP

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Dieses besitzt nach Satz 9.6 ebenfalls eine eindeutige Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes kompakte Intervall I mit $0 \in I$. Wir berechnen y über die Picard-Iterierten. Es ist

$$\begin{aligned} (P(0))(x) &= 1 + \int_0^x 0 \, dt = 1 \\ (P^2(0))(x) &= 1 + \int_0^x 1 \, dt = 1 + x \\ (P^3(0))(x) &= 1 + \int_0^x 1 + t \, dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \\ &\vdots \\ (P^n(0))(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

und daher

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P^n(0))(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

8. Eindeutigkeit von Lösungen und der Satz von Picard-Lindelöf

Korollar 8.9. Sei I ein Intervall, $x_0 \in I, y \in \mathbb{K}^n$ und $f : I \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig. Ferner genüge f auf jedem kompakten Intervall $J \subseteq I$ einer Lipschitz-Bedingung bezüglich der 2. Variablen. Dann besitzt das AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Beweis. Sei $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Intervalle mit $J_k \subseteq J_{k+1}$ und $I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k$. Nach Satz 9.6 besitzt für jedes $k \in \mathbb{N}$ das AWP eine eindeutige Lösung $y_k : J_k \rightarrow \mathbb{K}^n$. Insbesondere gilt $y_{k+1}|_{J_k} = y_k$. Damit ist $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit $y(x) := y_k(x)$ für $x \in J_k$ wohldefiniert und eine Lösung des AWP. Umgekehrt gilt für jede Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, dass $\varphi|_{J_k}$ eine Lösung auf J_k ist und somit wegen Eindeutigkeit $\varphi|_{J_k} = y_k$ gilt. Damit $\varphi = y$. $\square$

Bemerkung 8.10. Mit diesem Satz folgt die eindeutige Existenz von Lösungen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in Beispiel 9.8 (a) und (b).

Teil III.

Lineare Differentialgleichungen

9. Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Sei im Weiteren $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Definition. Seien $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig. Dann heißt

$$y' = A(x)y + b(x)$$

ein *lineares Differentialgleichungssystem (DGLS)*. Ist $b = 0$, so heißt das System *homogen*, sonst *inhomogen*.

Satz 9.1. Seien $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig, sowie $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{K}^n$. Dann besitzt das AWP

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Beweis. Nach Korollar 9.9 genügt es zu zeigen, dass

$$f(x, y) := A(x)y + b(x) \quad (x \in I, y \in \mathbb{R}^n)$$

für alle kompakten Intervalle $J \subseteq I$ eine Lipschitz-Bedingung erfüllt. In der Tat gilt für $J \subseteq I$ kompakt

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |A(x)y - A(x)z| \leq \sup_{t \in J} |A(t)| |y - z| \quad (x \in J, y, z \in \mathbb{K}^n). \quad \square$$

Satz 9.2. Sei $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ stetig. Dann ist

$$L_A := \{y : I \rightarrow \mathbb{K}^n; y' = A(x)y\}$$

ein n -dimensionaler Teilraum von $C(I; \mathbb{K}^n)$. Ferner sind für $y_1, \dots, y_k \in L_A$ die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $y_1, \dots, y_k$ sind linear unabhängig,
- (ii) $\forall x \in I : y_1(x), \dots, y_k(x)$ sind linear unabhängig,
- (iii) $\exists x \in I : y_1(x), \dots, y_k(x)$ sind linear unabhängig.

9. Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Beweis. Die Vektorraumstruktur von L_A ist offensichtlich. Sei nun $x_0 \in I$ und betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} F : L_A &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ y &\mapsto y(x_0). \end{aligned}$$

Dann ist F ein Vektorraum-Isomorphismus. Die Linearität von F ist offensichtlich. Die Bijektivität von F folgt unmittelbar aus Satz 10.1 (Eindeutigkeit $\Rightarrow$ injektiv, Existenz $\Rightarrow$ surjektiv). Damit folgt

$$\dim(L_A) = \dim(F[L_A]) = \dim \mathbb{K}^n = n.$$

Die Äquivalenz der Aussagen (i)-(iii) folgt unmittelbar mit dem Isomorphismus F . $\square$

Definition. Sei $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ stetig. Eine Basis $(y_1, \dots, y_n)$ von L_A heißt *Lösungsbasis* oder *Fundamentalsystem* des DGLS

$$y' = A(x)y. \tag{9.1}$$

Ist $(y_1, \dots, y_n)$ ein Fundamentalsystem, so heißt $\Phi : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\Phi(x) := (y_1(x), \dots, y_n(x))$ eine *Fundamentalmatrix* von (10.1).

Bemerkung 9.3. (a) Ist Φ eine Fundamentalmatrix, so ist nach Satz 10.2 $\Phi(x)$ regulär für alle $x \in I$.

(b) Sind $y_1, \dots, y_n \in L_A$, so bilden $(y_1, \dots, y_n)$ ein Fundamentalsystem, genau dann wenn

$$\forall/\exists x \in I : W(x) := \det(y_1(x), \dots, y_n(x)) \neq 0.$$

W heißt *Wronski-Determinante* von $y_1, \dots, y_n$.

(c) Ist Φ eine Fundamentalmatrix, so gilt

$$L_A = \{x \mapsto \Phi(x)c; c \in \mathbb{K}^n\}.$$

(Klar, da $\{x \mapsto \Phi(x)c; c \in \mathbb{K}^n\} = \text{Lin}\{y_i; i \in \{1, \dots, n\}\} = L_A$, wobei y_i die Spalten von Φ bezeichnen.)

(d) Ist Φ eine Fundamentalmatrix, so ist $\Psi(x) := \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1}$ für alle $x_0 \in I$ ebenfalls eine Fundamentalmatrix. (Offenbar sind die Spalten von Ψ Linearkombinationen von Φ und daher Lösungen. Außerdem gilt

$$W(x_0) = \det(\Phi(x_0)\Phi(x_0)^{-1}) = 1$$

und somit ist Ψ nach (b) eine Fundamentalmatrix.)

(e) Eine Abbildung $\Phi : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ ist genau dann eine Fundamentalmatrix, wenn

$$\Phi' = A(x)\Phi, \quad \det \Phi(x_0) \neq 0.$$

9. Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Lemma 9.4 (Superpositionsprinzip). Seien $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, b_1, b_2 : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig. Seien ferner $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ Lösungen der DGLSe

$$y' = A(x)y + b_1(x) \quad \text{bzw.} \quad y' = A(x)y + b_2(x).$$

Dann löst $cy_1 + dy_2$ für $c, d \in \mathbb{R}$ das DGLS

$$y' = A(x)y + cb_1(x) + db_2(x).$$

Beweis. Einfaches Nachrechnen. □

Satz 9.5. Seien $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig. Sei $y_p : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine Lösung des DGLS

$$y' = A(x)y + b(x).$$

Dann gilt

$$L_{A,b} := \{y : I \rightarrow \mathbb{K}^n ; y' = A(x)y + b(x)\} = \{y_h + y_p ; y_h \in L_A\}.$$

Beweis. Nach Lemma 10.4 löst $y_h + y_p$ das DGLS für jedes $y_h \in L_A$. Umgekehrt gilt nach Lemma 10.4 für jedes $y \in L_{A,b}$, dass $y - y_p \in L_A$. □

Die Aufgabe besteht also darin, eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems zu finden.

Satz 9.6 (Variation der Konstanten). Seien $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig. Sei ferner $\Phi : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Fundamentalmatrix des homogenen Problems

$$y' = A(x)y.$$

Dann gibt es $c : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ derart, dass

$$y_p(x) := \Phi(x)c(x) \quad (x \in I)$$

eine Lösung des inhomogenen Problems

$$y' = A(x)y + b(x)$$

ist.

Beweis. Mit dem Ansatz

$$y_p(x) = \Phi(x)c(x)$$

folgt

$$y_p'(x) = \Phi'(x)c(x) + \Phi(x)c'(x) = A(x)\Phi(x)c(x) + \Phi(x)c'(x) = A(x)y_p(x) + \Phi(x)c'(x).$$

9. Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Damit y_p das inhomogene Problem löst, muss also

$$\Phi(x)c'(x) = b(x)$$

gelten. Setzen wir

$$c(x) := \int_{x_0}^x \Phi(s)^{-1} b(s) \, ds \quad (x \in I)$$

für ein beliebiges $x_0 \in I$, so erhalten wir die gewünschte Lösung. $\square$

Bemerkung 9.7. Die Lösung des AWP

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

ist damit gegeben durch

$$y(x) = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1}y_0 + \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi(s)^{-1}b(s) \, ds.$$

Beispiel 9.8. Wir betrachten das DLGS

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{1+x} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf $I =]-1, \infty[$. Ein Fundamentalsystem zum zugehörigen Problem ist gegeben durch

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \ln(1+x) & 1 \\ \frac{1}{1+x} & 0 \end{pmatrix}.$$

In der Tat sind $y_1(x) = \begin{pmatrix} \ln(1+x) \\ \frac{1}{1+x} \end{pmatrix}$ und $y_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Lösungen des homogenen Problems und wegen

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

auch linear unabhängig. Damit ist

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \begin{pmatrix} \ln(1+x) & 1 \\ \frac{1}{1+x} & 0 \end{pmatrix} \int_0^x -(1+s) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{1+s} & \ln(1+s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \, ds \\ &= \begin{pmatrix} \ln(1+x) & 1 \\ \frac{1}{1+x} & 0 \end{pmatrix} \int_0^x \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \, ds \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Lösung des inhomogenen Problems. Somit ist die Lösungsmenge des inhomogenen gegeben durch

$$\left\{ x \mapsto c \begin{pmatrix} \ln(1+x) \\ \frac{1}{1+x} \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 \\ 0 \end{pmatrix} ; c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

10. Lineare Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten nun DGLS der Form

$$y' = Ay \tag{10.1}$$

für ein $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und wollen einen Weg finden, ein Fundamentalsystem für dieses DGLS zu finden.

Lemma 10.1. *Sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt für $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit $y(x) := e^{\lambda x} v$*

$$y'(x) = Ay(x).$$

Beweis. Klar. □

Satz 10.2. *Sei A diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, d.h. es gibt Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ von A (mit Vielfachheiten gezählt) und zugehörige linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$. Dann bilden die Funktionen $y_1, \dots, y_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ gegeben durch*

$$y_i(x) := e^{\lambda_i x} v_i$$

ein Fundamentalsystem von (11.1).

Beweis. Nach Lemma 11.1 gilt

$$y'_i(x) = Ay_i(x).$$

Außerdem gilt

$$W(0) = \det(v_1, \dots, v_n) \neq 0,$$

aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren. □

Beispiel 10.3. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1$$

10. Lineare Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

und somit sind $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$ die Eigenwerte dieser Matrix. Für die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v_1 = \overline{v_2}$ gilt

$$\begin{aligned} -ix - y &= 0, \\ x - iy &= 0 \end{aligned}$$

und damit z. B.

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als Fundamentalsystem ergibt sich somit

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{ix} v_1 = \begin{pmatrix} ie^{ix} \\ e^{ix} \end{pmatrix} \\ y_2(x) &= e^{-ix} v_2 = \begin{pmatrix} -ie^{-ix} \\ e^{-ix} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass wir trotz einer reellen Matrix A ein Fundamentalsystem mit komplexwertigen Funktionen erhalten. In der Tat können wir hieraus ebenso ein reellwertiges Fundamentalsystem konstruieren.

Lemma 10.4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine Lösung von

$$y' = Ay.$$

Dann sind $y_1 := \operatorname{Re} y, y_2 := \operatorname{Im} y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ebenfalls Lösungen.

Beweis. Es gilt

$$y_1' = (\operatorname{Re} y)' = \operatorname{Re} y' = \operatorname{Re} Ay = A \operatorname{Re} y = Ay_1$$

und analog für y_2 . □

Lemma 10.5. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f_1, \dots, f_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sowie $f_{k+1}, \dots, f_\ell : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ so, dass

$$\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \overline{f_{k+1}}, \dots, f_\ell, \overline{f_\ell}\}$$

linear unabhängig ist. Dann ist auch

$$\{f_1, \dots, f_k, \operatorname{Re} f_{k+1}, \operatorname{Im} f_{k+1}, \dots, \operatorname{Re} f_\ell, \operatorname{Im} f_\ell\}$$

linear unabhängig.

Beweis. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell, \mu_{k+1}, \dots, \mu_\ell \in \mathbb{C}$ mit

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k + \lambda_{k+1} \operatorname{Re} f_{k+1} + \mu_{k+1} \operatorname{Im} f_{k+1} + \dots + \lambda_\ell \operatorname{Re} f_\ell + \mu_\ell \operatorname{Im} f_\ell = 0.$$

10. Lineare Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Nun gilt für $j \in \{k+1, \dots, \ell\}$

$$\begin{aligned}\lambda_j \operatorname{Re} f_j + \mu_j \operatorname{Im} f_j &= \lambda_j \frac{1}{2} (f_j + \overline{f_j}) + \mu_j \frac{1}{2i} (f_j - \overline{f_j}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\lambda_j + \frac{1}{i} \mu_j \right) f_j + \frac{1}{2} \left(\lambda_j - \frac{1}{i} \mu_j \right) \overline{f_j}\end{aligned}$$

und damit nach Voraussetzung

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0,$$

sowie

$$\frac{1}{2} \left(\lambda_j + \frac{1}{i} \mu_j \right) = \frac{1}{2} \left(\lambda_j - \frac{1}{i} \mu_j \right) = 0$$

für alle $j \in \{k+1, \dots, \ell\}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\lambda_j &= \frac{1}{2} \left(\lambda_j + \frac{1}{i} \mu_j \right) + \frac{1}{2} \left(\lambda_j - \frac{1}{i} \mu_j \right) = 0, \\ \mu_j &= i \left(\frac{1}{2} \left(\lambda_j + \frac{1}{i} \mu_j \right) - \frac{1}{2} \left(\lambda_j - \frac{1}{i} \mu_j \right) \right) = 0.\end{aligned}\quad \square$$

Korollar 10.6. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, d.h. es gibt Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und Eigenwerte $\lambda_{k+1}, \overline{\lambda_{k+1}}, \dots, \lambda_\ell, \overline{\lambda_\ell} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ von A (mit $k + 2(\ell - k) = n$) und zugehörige linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \overline{v_{k+1}}, \dots, v_\ell, \overline{v_\ell} \in \mathbb{C}^n$. Dann bilden die Funktionen

$$y_i(x) := e^{\lambda_i x} v_i,$$

falls $i \in \{1, \dots, k\}$ und

$$\begin{aligned}y_i(x) &:= \operatorname{Re} \left(e^{\lambda_i x} v_i \right) \\ y_{i+1}(x) &:= \operatorname{Im} \left(e^{\lambda_i x} v_i \right)\end{aligned}$$

falls $i \in \{k+1, k+3, \dots, \ell-1\}$ ein reelles Fundamentalsystem zu (11.1).

Beweis. Die angegebenen Funktionen sind Lösungen nach Satz 11.2 und Lemma 11.4 und linear unabhängig nach Lemma 11.5. $\square$

Beispiel 10.7. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ und $v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit bilden

$$\begin{aligned}y_1(x) &= \operatorname{Re} e^{ix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \\ y_2(x) &= \operatorname{Im} e^{ix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ein reelles Fundamentalsystem.

10. Lineare Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Kommen wir nun zum allgemeinen Fall nicht-diagonalisierbarer Matrizen. Ein Fundamentalsystem Ψ zu (11.1) können wir über das AWP

$$\Psi' = A\Psi, \quad \Psi(0) = E$$

bestimmen. Wir können diese Lösung mithilfe der Picard-Iterierten berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} P(0)(x) &= E + \int_0^x A0 \, dt = E, \\ P^2(0)(x) &= E + \int_0^x AE \, dt = E + xA, \\ P^3(0)(x) &= E + \int_0^x A(E + xA) \, dt = E + xA + \frac{1}{2}xA^2, \\ &\vdots \\ P^n(0)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} A^k. \end{aligned}$$

Nach Banach'schem Fixpunktsatz konvergiert

$$P^n(0) \rightarrow \Psi$$

in $C(I; \mathbb{K}^{n \times n})$ für jedes kompakte Intervall I , also insbesondere

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k =: \exp(xA).$$

Definition. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Wir definieren

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{K}^{n \times n} &\rightarrow \mathbb{K}^{n \times n} \\ A &\mapsto \exp(A) \end{aligned}$$

heißt *Matrix-Exponentialfunktion*.

Satz 10.8. Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $AB = BA$. Dann gilt

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

10. Lineare Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$\Psi(t) := \exp(tA) \exp(tB) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt $\Psi(0) = E$ und

$$\Psi'(t) = A \exp(tA) \exp(tB) + \exp(tA) B \exp(tB).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \exp(tA)B &= \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} A^k \right) \cdot B \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} (A^k \cdot B) \\ &= B \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} A^k \\ &= B \exp(tA) \end{aligned}$$

und somit löst Ψ das AWP

$$\Psi' = (A + B)\Psi, \quad \Psi(0) = E.$$

Aus der Eindeutigkeit folgt

$$\Psi(t) = \exp(t(A + B)) \quad (t \in \mathbb{R})$$

und damit insbesondere

$$\exp(A + B) = \Psi(1) = \exp(A) \exp(B). \quad \square$$

Bemerkung 10.9. Ist Φ ein Fundamentalsystem, so gilt

$$\exp(tA) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}.$$

Beispiel 10.10. Wir hatten gesehen, dass für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem durch

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x} & -\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}x} \\ e^{\mathrm{i}x} & e^{-\mathrm{i}x} \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Dementsprechend gilt

$$\begin{aligned} \exp(xA) &= \Phi(x)\Phi(0)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x} & -\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}x} \\ e^{\mathrm{i}x} & e^{-\mathrm{i}x} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10. Lineare Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) & -\frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \\ \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) & \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Satz 10.11 (Putzer-Algorithmus). Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von $p(\lambda) := \det(A - \lambda E)$. Wir definieren die Matrizen

$$\begin{aligned}
 P_0 &:= E \\
 P_i &:= (A - \lambda_i E)P_{i-1} \quad (i \in \{1, \dots, n\}).
 \end{aligned}$$

Ferner definieren wir Funktionen $w_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ rekursiv durch die AWP

$$\begin{aligned}
 w'_1 &= \lambda_1 w_1, \quad w_1(0) = 1, \\
 w'_i &= \lambda_i w_i + w_{i-1}, \quad w_i(0) = 0 \quad (i \in \{2, \dots, n\}).
 \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\exp(xA) = \sum_{i=1}^n w_i(x) P_{i-1}.$$

Beweis. Nach Satz von Cayley-Hamilton gilt $P_n = p(A) = 0$. Es gilt

$$AP_{i-1} = P_i + \lambda_i P_{i-1} \quad (i \in \{1, \dots, n\})$$

und daher

$$\begin{aligned}
 A \sum_{i=1}^n w_i(x) P_{i-1} &= \sum_{i=1}^n w_i(x) (P_i + \lambda_i P_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} w_i(x) P_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i(x) P_{i-1} \\
 &= \sum_{i=2}^n w_{i-1}(x) P_{i-1} + \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i(x) P_{i-1} \\
 &= \sum_{i=2}^n (\lambda_i w_i(x) + w_{i-1}(x)) P_{i-1} + \lambda_1 w_1(x) P_0 \\
 &= \sum_{i=1}^n w'_i(x) P_{i-1}.
 \end{aligned}$$

Da ferner

$$\sum_{i=1}^n w_i(0) P_{i-1} = w_1(0) P_0 = E,$$

folgt die Behauptung. □

Beispiel 10.12. Wir berechnen die Exponentialmatrix zu $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nun über den Putzer-Algorithmus. Es ist $\lambda_{1/2} = \pm i$. Damit gilt

$$P_0 = E, P_1 = A - iE = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Zur Probe berechnen wir

$$P_2 = (A + iE)P_1 = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = 0.$$

Wir berechnen nun w_1 über

$$w_1' = iw_1, \quad w_1(0) = 1.$$

Es ist $w_1(x) = e^{ix}$. Nun berechnen wir w_2 über

$$w_2' = -iw_2 + w_1, \quad w_2(0) = 0.$$

Das homogene Problem hat die allgemeine Lösung $w_{2,h}(x) = ce^{-ix}$. Mit Variation der Konstanten erhalten wir

$$c'(x)e^{-ix} = e^{ix}$$

und daher

$$c(x) = \int_0^x e^{2is} ds = \frac{1}{2i}(e^{2ix} - 1).$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems hat also die Form

$$ce^{-ix} + \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = ce^{-ix} + \sin(x).$$

Die Anfangsbedingung liefert nun $c = 0$, also

$$w_2(x) = \sin(x).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \exp(xA) &= w_1(x)P_0 + w_2(x)P_1 \\ &= \begin{pmatrix} e^{ix} - i \sin x & -\sin x \\ \sin x & e^{ix} - i \sin x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

11. Lineare skalare Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Sei I ein Intervall und $a_n, \dots, a_0 : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetig mit $a_n(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

Definition. Sei $r : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Die DGL

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x)$$

heißt *lineare skalare Differentialgleichung n -ter Ordnung (sDGL)*. Ist $r = 0$, so heißt die Gleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.

Satz 11.1. Sei $r : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetig, $x_0 \in I$ und $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{K}$. Dann besitzt das AWP

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x), \quad y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

genau eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Beweis. Nach Satz 1.4 ist $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ genau dann eine Lösung des AWP, wenn $y(x) = e_1^\top z(x)$ mit

$$z' = A(x)z + b(x), \quad z(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix},$$

wobei

$$A(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0(x)}{a_n(x)} & \cdots & & -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} & \end{pmatrix}, \quad b(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(x) \end{pmatrix}. \quad (11.1)$$

Somit folgt die Behauptung aus Satz 10.1. □

11. Lineare skalare Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Satz 11.2. *Sei*

$$L_a := \left\{ y : I \rightarrow \mathbb{K} ; a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = 0 \right\}.$$

Dann ist L_a ein n -dimensionaler Vektorraum. Zudem sind für $y_1, \dots, y_k \in L_a$ folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $y_1, \dots, y_k$ sind linear unabhängig,
- (ii) $\forall x \in I : (y_1(x), \dots, y_1^{(n-1)}(x)), \dots, (y_k(x), \dots, y_k^{(n-1)}(x))$ sind linear unabhängig,
- (iii) $\exists x \in I : (y_1(x), \dots, y_1^{(n-1)}(x)), \dots, (y_k(x), \dots, y_k^{(n-1)}(x))$ sind linear unabhängig.

Beweis. Nach Satz 1.4 gilt

$$L_a = \left\{ e_1^\top z ; z \in L_A \right\}$$

und

$$L_A = \left\{ (y, \dots, y^{(n-1)}) ; y \in L_a \right\}$$

mit A gegeben durch (12.1). Somit ist $e_1^\top : L_A \rightarrow L_a$ ein Vektorraumisomorphismus und daher folgen alle Behauptungen aus Satz 10.2. $\square$

Definition. Eine Basis des Vektorraum L_a heißt *Lösungsbasis* oder *Fundamentalsystem* von

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = 0.$$

Bemerkung 11.3. Nach Satz 12.2 ist $y_1, \dots, y_n \in L_a$ genau dann ein Fundamentalsystem, wenn

$$\forall / \exists x \in I : W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Satz 11.4. *Sei $r : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Sei ferner $y_p : I \rightarrow \mathbb{K}$ eine Lösung von*

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = r(x).$$

Dann gilt

$$L_{a,r} := \left\{ y : I \rightarrow \mathbb{K} ; a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = r(x) \right\} = \{y_p + y_h ; y_h \in L_a\}.$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem Superpositionsprinzip. $\square$

Bemerkung 11.5. Eine spezielle Lösung y_p des inhomogenen Problems erhält man z.B. über Variation der Konstanten des zugehörigen Systems

$$z' = A(x)z + b(x).$$

12. Lineare skalare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Seien nun $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Wir betrachten sDGL der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} \dots + a_0y = 0. \quad (12.1)$$

Wählen wir den Ansatz $y(x) := e^{\lambda x}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so erhalten wir

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} \dots + a_0) e^{\lambda x} = 0.$$

Dies führt zur Untersuchung des so genannten charakteristischen Polynoms.

Definition. Das Polynom

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

heißt *charakteristisches Polynom der sDGL (13.1)*.

Bemerkung 12.1. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$$

für gewisse $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (beachte, dass $\lambda_i = \lambda_j$ für $i \neq j$ auftreten kann). Offenbar sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Nullstellen von p gezählt mit Vielfachheiten.

Lemma 12.2. *Sei p das charakteristische Polynom zu (13.1) und sei λ_1 dessen einzige Nullstelle (mit Vielfachheit n). Dann bilden die Funktionen*

$$y_i(x) := x^{i-1} e^{\lambda_1 x} \quad (i \in \{1, \dots, n\})$$

ein Fundamentalsystem von (13.1).

12. Lineare skalare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $\lambda_1 = 0$ gilt. Dann ist $p(\lambda) = \lambda^n$ also die sDGL

$$y^{(n)} = 0.$$

Offenbar sind dann $y_i(x) = x^{i-1}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ Lösungen dieser DGL und linear unabhängig.

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Es ist $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^n$. Die DGL ist dann gegeben durch

$$p(\partial)y = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\lambda_1)^i y^{(n-i)} = 0. \quad (12.2)$$

Nun gilt

$$p(\partial)y = 0 \Leftrightarrow y_{\lambda_1}^{(n)} = 0 \quad (12.3)$$

mit $y_{\lambda_1}(x) = e^{-\lambda_1 x} y(x)$. In der Tat gilt

$$y_{\lambda_1}^{(n)}(x) = e^{-\lambda_1 x} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\lambda_1)^i y^{(n-i)}(x)$$

und somit folgt (13.3). Nach obiger Argumentation ist $\{x \mapsto 1, \dots, x \mapsto x^{n-1}\}$ ein Fundamentalsystem für $y^{(n)} = 0$ und daher ist $\{x \mapsto e^{\lambda_1 x}, \dots, x \mapsto x^{n-1} e^{\lambda_1 x}\}$ ein Fundamentalsystem für (13.2) (beachte: die Multiplikation mit $e^{\lambda_1 x}$ erhält die lineare Unabhängigkeit). $\square$

Satz 12.3. Sei p das charakteristische Polynom zu (13.1) und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ dessen Nullstellen mit Vielfachheiten $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ (insbesondere gilt $\sum_{j=1}^k m_j = n$). Dann bilden die Funktionen

$$\left(x \mapsto x^j e^{\lambda_i x} \right) \quad (i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{0, \dots, m_i - 1\})$$

ein Fundamentalsystem von (13.1).

Beweis. Es gilt $p(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^k p_i(\lambda)$. Nach Lemma 13.2 bilden die Funktionen

$$y_j(x) = x^j e^{\lambda_i x} \quad (j \in \{0, \dots, m_i - 1\})$$

ein Fundamentalsystem zu

$$p_i(\partial)y = 0.$$

Da

$$p(\partial) = \prod_{i=1}^k p_i(\partial),$$

folgt, dass die Funktionen

$$y(x) := x^j e^{\lambda_i x} \quad (i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{0, \dots, m_i - 1\})$$

12. Lineare skalare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

tatsächlich n Lösungen von (13.1) sind. Es verbleibt die lineare Unabhängigkeit zu überprüfen. Eine Linearkombination der Funktionen hat die Form

$$x \mapsto P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + P_k(x)e^{\lambda_k x}$$

für gewisse Polynome $P_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Es genügt also zu zeigen, dass aus

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + P_k(x)e^{\lambda_k x} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

folgt, dass

$$P_1 = \dots = P_k = 0$$

gilt. Wir führen eine Induktion nach k durch. Für $k = 1$ folgt die Behauptung trivial. Gelte sie nun für $k - 1 \in \mathbb{N}$ und sei

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + P_k(x)e^{\lambda_k x} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Dann folgt

$$P_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_k)x} + \dots + P_{k-1}(x)e^{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x} + P_k(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Differenzieren wir diese Gleichung $r := \deg P_k + 1$ mal, so folgt

$$\tilde{P}_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_k)x} + \dots + \tilde{P}_{k-1}(x)e^{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit

$$\tilde{P}_j(x) = \sum_{i=0}^r \underbrace{\binom{r}{i} P_j^{(i)}(x) (\lambda_j - \lambda_k)^{r-i}}_{\deg(\cdot) = \deg P_j - i}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt nun

$$\tilde{P}_1 = \dots = \tilde{P}_{k-1} = 0$$

und somit insbesondere

$$P_j(x)(\lambda_j - \lambda_k)^r = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Da $\lambda_j \neq \lambda_k$ folgt $P_1 = \dots = P_{k-1} = 0$ und damit auch $P_k = 0$. Das beendet den Beweis. $\square$

Beispiel 12.4. Wir betrachten die DGL

$$y'' + 9y = \cos(3x)$$

in $\mathbb{C}$. Das zugehörige homogene Problem hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 9$$

und die Nullstellen

$$\lambda_1 = 3i, \quad \lambda_2 = -3i.$$

12. Lineare skalare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Damit ist die allgemeine homogene Lösung gegeben durch

$$\{x \mapsto c_1 e^{3ix} + c_2 e^{-3ix}; c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Wir berechnen die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems über die Variation der Konstanten. Das zugehörige System hat die Fundamentalmatrix

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{3ix} & e^{-3ix} \\ 3ie^{3ix} & -3ie^{-3ix} \end{pmatrix}.$$

Mit dem Lösungsansatz $\Phi(x)c(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} c'(x) &= \Phi(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 3x \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{6i} \begin{pmatrix} -3ie^{-3ix} & -e^{-3ix} \\ -3ie^{3ix} & e^{3ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 3x \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{6i} \begin{pmatrix} -e^{-3ix} \cos 3x \\ e^{3ix} \cos 3x \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{12i} \begin{pmatrix} -(1 + e^{-6ix}) \\ e^{6ix} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und daher

$$c(x) = -\frac{1}{12i} \begin{pmatrix} -(x - \frac{1}{6i} e^{-6ix}) \\ \frac{1}{6i} e^{6ix} + x \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi(x)c(x) &= -\frac{1}{12i} \begin{pmatrix} -xe^{3ix} + \frac{1}{6i} e^{-3ix} + \frac{1}{6i} e^{3ix} + xe^{-3ix} \\ * \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{12i} \begin{pmatrix} -2ix \sin(3x) + \frac{1}{3i} \cos(3x) \\ * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} x \sin(3x) + \frac{1}{36} \cos(3x) \\ * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$y_p(x) = \frac{1}{6} x \sin(3x) + \frac{1}{36} \cos(3x)$$

als spezielle Lösung des inhomogenen Problems. Somit ist die allgemeine Lösung gegeben als

$$\left\{ x \mapsto c_1 e^{3ix} + c_2 e^{-3ix} + \frac{1}{6} x \sin(3x) + \frac{1}{36} \cos(3x); c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Satz 12.5. Sei p das charakteristische Polynom zu (13.1) und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ dessen Nullstellen mit Vielfachheiten $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$. Weiter sei p reell (d.h. alle Koeffizienten $a_{n-1}, \dots, a_0$ in (13.1) sind reell). Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ die reellen Nullstellen und $\lambda_{\ell+1} = \overline{\lambda_{\ell+2}}, \dots, \lambda_{k-1} = \overline{\lambda_k}$ die nicht reellen Nullstellen. Dann bilden die Funktionen

$$y(x) = x^j e^{\lambda_i x} \quad (i \in \{1, \dots, \ell\}, j \in \{1, \dots, m_i\})$$

12. Lineare skalare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y(x) = x^j e^{\operatorname{Re} \lambda_i x} \cos(\operatorname{Im} \lambda_i x) \quad ((i \in \{\ell + 1, \dots, k - 1\}, j \in \{0, \dots, m_i - 1\}))$$

$$y(x) = x^j e^{\operatorname{Re} \lambda_i x} \sin(\operatorname{Im} \lambda_i x) \quad ((i \in \{\ell + 1, \dots, k - 1\}, j \in \{0, \dots, m_i - 1\}))$$

ein reelles Fundamentalsystem von (13.1).

Beweis. Nach Satz 13.3 bilden die Funktionen

$$x \mapsto x^j e^{\lambda_i x} \quad (i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{0, \dots, m_i - 1\})$$

ein komplexes Fundamentalsystem. Da $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ sind auch

$$x \mapsto \operatorname{Re} x^j e^{\lambda_i x} = x^j e^{\operatorname{Re} \lambda_i x} \cos(\operatorname{Im} \lambda_i x)$$

$$x \mapsto \operatorname{Im} x^j e^{\lambda_i x} = x^j e^{\operatorname{Re} \lambda_i x} \sin(\operatorname{Im} \lambda_i x)$$

Lösungen und linear unabhängig nach Lemma 11.5. □

Beispiel 12.6. Die allgemeine reelle Lösung der DGL

$$y'' + 9y = \cos(3x)$$

ist damit gegeben durch

$$\left\{ x \mapsto c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + \frac{1}{6} x \sin(3x); c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir beschließen dieses Kapitel mit speziellen Ansatzfunktionen für die Lösung inhomogener Probleme.

Lemma 12.7. Sei p das charakteristische Polynom zu (13.1) und sei $\mu \in \mathbb{C}$ keine Nullstelle von p . Sei weiter $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom. Dann existiert ein Polynom $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\deg r = \deg q$, so dass $y := e^{\mu x} r(\cdot)$ eine Lösung der sDGL

$$p(\partial)y = e^{\mu x} q(x)$$

ist.

Beweis. Wir führen eine Induktion über den Grad von p durch. Ist $\deg p = 1$, so gilt

$$p(x) = (x - \lambda) \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\mu\}$. Nach Superpositionsprinzip genügt es, die Behauptung für $q(x) = x^m$ für $m \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen. Wir setzen $r(x) := \sum_{i=0}^m c_i x^i$ mit

$$\begin{pmatrix} \mu - \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu - \lambda & 2 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \mu - \lambda & m \\ 0 & \cdots & & 0 & \mu - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{m-1} \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12. Lineare skalare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Dann gilt

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda)r(x) + r'(x) &= \sum_{i=0}^m (\mu - \lambda)c_i x^i + \sum_{i=1}^m c_i i x^{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} ((\mu - \lambda)c_i + (i+1)c_{i+1}) x^i + (\mu - \lambda)c_m x^m \\ &= x^m \end{aligned}$$

und somit

$$(p(\partial)e^{\mu \cdot} r)(x) = ((\partial - \lambda)e^{\mu \cdot} r)(x) = e^{\mu x} ((\mu - \lambda)r(x) + r'(x)) = e^{\mu x} x^m$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Gelte die Behauptung nun für alle Polynome vom Grad n und sei $\deg p = n + 1$. Dann gilt

$$p(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i) = \prod_{i=2}^n (x - \lambda_i)(x - \lambda_1) =: \tilde{p}(x)(x - \lambda_1) \quad (x \in \mathbb{R})$$

für gewisse $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \{\mu\}$. Nach IV existiert ein Polynom $\tilde{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\deg \tilde{r} = \deg q$, so dass

$$\tilde{p}(\partial)e^{\mu \cdot} \tilde{r} = e^{\mu x} q(x).$$

Nach oben Gezeigtem, existiert ferner ein Polynom $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\deg r = \deg \tilde{r} = \deg q$ so dass

$$(\partial - \lambda_1)e^{\mu \cdot} r = e^{\mu x} \tilde{r}(x)$$

gilt. Damit gilt

$$p(\partial)e^{\mu \cdot} r = \tilde{p}(\partial)(\partial - \lambda_1)e^{\mu \cdot} r = \tilde{p}(\partial)e^{\mu \cdot} \tilde{r} = e^{\mu x} q(x). \quad \square$$

Lemma 12.8. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $p(x) := (x - \lambda)^k$ für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Sei ferner $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom. Dann existiert ein Polynom $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\deg r = \deg q$, so dass $y(x) := e^{\lambda x} r(x) x^k$ für $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung der sDGL

$$p(\partial)y = e^{\lambda x} q(x)$$

ist.

Beweis. Nach Superpositionsprinzip genügt es den Fall $q(x) = x^m$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$ zu behandeln. Wir setzen $r(x) = \frac{m!}{(m+k)!} x^m$ für $x \in \mathbb{R}$ und erhalten

$$\partial^k (x \mapsto r(x) x^k) = \frac{m!}{(m+k)!} \partial^k (x \mapsto x^{m+k}) = x^m.$$

Somit gilt mit $y(x) := e^{\lambda x} r(x) x^k$ für $x \in \mathbb{R}$

$$p(\partial)y = e^{\lambda x} \partial^k (x \mapsto r(x) x^k) = e^{\lambda x} x^m. \quad \square$$

12. Lineare skalare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Satz 12.9. Sei p das charakteristische Polynom zu (13.1). Sei ferner $\mu \in \mathbb{C}$ und $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom. Dann existiert ein Polynom $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\deg r = \deg q$ so, dass $y(x) := e^{\mu x} r(x) x^s$ eine Lösung der sDGL

$$p(\partial)y = e^{\mu x} q(x)$$

ist, wobei $s \in \mathbb{N}_0$ die Vielfachheit von μ als Nullstelle von p sei.

Beweis. Ist μ keine Nullstelle von p (also $s = 0$), so folgt die Behauptung aus Lemma 13.7. Sei nun μ eine Nullstelle der Vielfachheit $s \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$p(x) = (x - \mu)^s \tilde{p}(x)$$

für ein Polynom $\tilde{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{p}(\mu) \neq 0$. Nach Lemma 13.7 Polynom $\tilde{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\deg \tilde{r} = \deg q$ so, dass

$$\tilde{p}(\partial)e^{\mu \cdot} \tilde{r} = e^{\mu x} q(x).$$

Nach Lemma 13.8 existiert ferner ein Polynom $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\deg r = \deg \tilde{r} = \deg q$ so, dass $y(x) := e^{\mu x} r(x) x^s$ für $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$(\partial - \mu)^s y = e^{\mu x} \tilde{r}(x)$$

ist. Somit gilt

$$p(\partial)y = \tilde{p}(\partial)(\partial - \mu)^s y = \tilde{p}(\partial)e^{\mu \cdot} \tilde{r} = e^{\mu x} q(x). \quad \square$$

Beispiel 12.10. Wir betrachten wieder die DGL

$$y'' + 9y = \cos(3x) = \operatorname{Re} e^{3ix}.$$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 9$ besitzt die Nullstellen $\pm 3i$. Wir lösen zunächst zur rechten Seite e^{3ix} . Nach Satz 13.9 hat eine spezielle Lösung dieser Gleichung die Form

$$y(x) = C e^{3ix} x$$

für ein $C \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= C e^{3ix} (3ix + 1) \\ y''(x) &= C e^{3ix} (-9x + 6i). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} e^{3ix} &\stackrel{!}{=} y''(x) + 9y(x) \\ &= C e^{3ix} 6i \end{aligned}$$

und somit $C = -\frac{i}{6}$. Für das Originalproblem ergibt sich damit die spezielle Lösung

$$y(x) = \operatorname{Re} \left(-\frac{i}{6} e^{3ix} x \right) = \frac{1}{6} \sin(3x)x.$$

Teil IV.

Anhang

A. Der Satz von Cayley-Hamilton

Lemma A.1. Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$. Sei weiter $A_1 \in \mathbb{C}^{k \times k}$, $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ und $A_3 \in \mathbb{C}^{k \times (n-k)}$. Dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \det A_1 \det A_2.$$

Beweis. Induktion nach n . Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Gelte die Aussage nun für n und sei $k < n + 1$. Für $k = 0$ ist wieder nichts zu zeigen. Sei also $k > 1$. Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k (-1)^i a_{i1}^{(1)} \det \begin{pmatrix} A_1^i & A_3^i \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

wobei A_1^i und A_3^i jeweils aus A_1 und A_3 durch Streichen der i -ten Zeile entstehen. Nach Voraussetzung gilt nun

$$\sum_{i=1}^k (-1)^i a_{i1}^{(1)} \det A_1^i \det A_2 = \det A_1 \det A_2. \quad \square$$

Lemma A.2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_{ii}, a_{in} \in \mathbb{C}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \left(a_{in} \prod_{j=1}^{i-1} a_{jj} \right).$$

Beweis. Induktion nach n . Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Gelte die Aussage nun für $n - 1$. Dann ist

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

A. Der Satz von Cayley-Hamilton

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{n-1} a_{1n} \det \begin{pmatrix} -1 & a_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
& = a_{11} \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_{i+1,n} \prod_{j=1}^{i-1} a_{j+1,j+1} \right) + a_{1n} \\
& = a_{11} \sum_{i=2}^n \left(a_{in} \prod_{j=2}^{i-1} a_{jj} \right) + a_{1n} \\
& = \sum_{i=1}^n \left(a_{in} \prod_{j=1}^{i-1} a_{jj} \right). \quad \square
\end{aligned}$$

Satz A.3 (Cayley-Hamilton). Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $p(\lambda) := \det(\lambda E - A)$. Dann gilt $p(A) = 0$.

Beweis. Sei $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ maximal, so dass $\{v, Av, \dots, A^{k-1}v\}$ linear unabhängig sind. Dann existieren $c_0, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{C}$ mit

$$A^k v = \sum_{i=0}^{k-1} c_i A^i v.$$

Seien nun $w_{k+1}, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\{v, Av, \dots, A^{k-1}v, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ linear unabhängig sind. Dann ist die Matrix

$$B := (v, Av, \dots, A^{k-1}v, w_{k+1}, \dots, w_n)$$

invertierbar und es gilt

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_0 & \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & * \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \\ \vdots & & 1 & c_{k-1} & \\ 0 & \cdots & & 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

für eine Matrix $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$. Nun gilt

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(\lambda E - A) = \det(B^{-1}(\lambda E - A)B) \\
&= \det(\lambda E - B^{-1}AB)
\end{aligned}$$

A. Der Satz von Cayley-Hamilton

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & -c_{k-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda - c_{k-1} \end{pmatrix} \det(\lambda E - A_2) \\
&= \det(\lambda E - A_2) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k-1} \left((-c_{i-1}) \prod_{j=1}^{i-1} \lambda \right) + (\lambda - c_{k-1}) \lambda^{k-1} \right) \\
&= \det(\lambda E - A_2) \cdot \left(\lambda^k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^{i-1} c_{i-1} \right) \\
&=: p_1(\lambda) \cdot \left(\lambda^k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^{i-1} c_{i-1} \right).
\end{aligned}$$

Somit gilt also

$$p(A)v = p_1(A) \left(A^k v - \sum_{i=1}^{k-1} c_{i-1} A^{i-1} v \right) = 0.$$

Da v beliebig war, folgt $p(A) = 0$. □