

Analysis 3 (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

1. Aufgabenblatt: Modellierung

1. *Schleppkurve.* Ein Massepunkt in der Ebene wird an einem Faden der Länge a entlang der x -Achse gezogen. Welche Kurve $y(x)$ beschreibt der Punkt dann?
2. Auf dem Graph einer glatten Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rollt eine kleine Vollkugel mit Radius r und Masse m unter dem Einfluß der Schwerkraft. Gesucht ist die momentane Lage dieser Kugel, beschrieben durch die Koordinate $x(t)$. Welche Differentialgleichung ergibt sich speziell für $f(x) = x^2$?
3. Zwischen zwei reibungsfrei auf einer Ebene rollenden Wagen mit Massen m_1, m_2 befindet sich eine Feder mit der Federkonstanten k , die in entspanntem Zustand die Länge l hat. An welchen Orten $x_1(t), x_2(t)$ befinden sich beide zur Zeit t ? Man gebe außerdem eine Differentialgleichung für die momentane Auslenkung aus der Ruhelage $z(t) = x_2 - x_1 - l$ beider Wagen an.
4. *Verbreitung von Gerüchten.* In einer Population der Größe N seien zur Zeit t gerade $I(t)$ Personen über eine Nachricht informiert, wobei $I(t)$ als kontinuierlich angenommen werde. Jeder Informierte habe pro Zeiteinheit k Kontakte mit (zufälligen) anderen Personen. Nach welchem Gesetz wächst die Zahl der Informierten?
5. *Rollpendel.* Ein Stab mit Radius r und Masse m liegt auf einer waagerechten Fläche. Sein Schwerpunkt hat Abstand s von seiner Rotationsachse ($s < r$). Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Winkelauslenkung $\varphi(t)$ des Stabes auf. Was ergibt sich für kleine Auslenkungen?