

## Analysis 3 (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

### 2. Aufgabenblatt: Trennung der Veränderlichen

1. Man bestimme die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichungen:

(a)  $e^x x' - t - t^3 = 0$ ,

(b)  $(1 + t^2)x' = 1 + x^2$ .

2. Man löse folgende Anfangswertprobleme:

(a)  $t^2(1 + x^2) + 2xx' = 0$ ,  $x(0) = 1$ ,

(b)  $x' = \frac{2t}{x + xt^2}$ ,  $x(2) = 3$ .

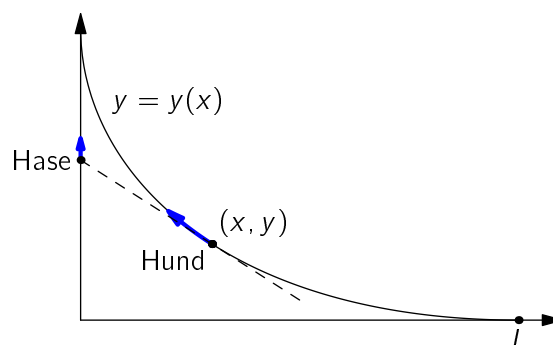
3. Eine ideale Flüssigkeit strömt aus der Öffnung eines Behälters mit Querschnittsfläche  $F(h)$  in Höhe  $h$  über der Öffnung mit Fläche  $A$ .

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Höhe des Flüssigkeitsspiegels  $h = h(t)$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  auf.

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung für den Fall eines stehenden bzw. liegenden Kreiszylinders mit Höhe  $H$  und Radius  $R$ . Welcher ist schneller leer?

(c) Wie muß ein rotationssymmetrisches Gefäß beschaffen sein, damit der Flüssigkeitsspiegel mit gleichförmiger Geschwindigkeit sinkt?

4. Ein Hund verfolgt einen Hasen, der vom Ursprung aus mit gleichförmiger Geschwindigkeit in Richtung positiver  $y$ -Achse rennt. Der Hund startet im Punkt  $(L, 0)$  und läuft immer in Richtung des Hasen. Die Geschwindigkeit des Hundes ist doppelt so groß wie die des Hasen.



- (a) Begründen Sie, warum die Bahnkurve  $y = y(x)$  des Hundes der Differentialgleichung

$$xy'' = \frac{1}{2}\sqrt{1 + y'^2} \quad (1)$$

genügt.

- (b) Lösen Sie die Differentialgleichung (1). Hinweis: Substituieren Sie  $z(x) := y'(x)$  und bestimmen Sie zunächst  $z(x)$ .
- (c) Formulieren Sie der Problemstellung entsprechende Anfangsbedingungen für die Differentialgleichung (1) und geben Sie die Lösung an, die auch diesen Anfangsbedingungen genügt.
- (d) An welchem Ort erreicht der Hund den Hasen?