

Analysis 3 (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

4. Aufgabenblatt: Wegintegrale 2. Art und exakte Differentialgleichungen

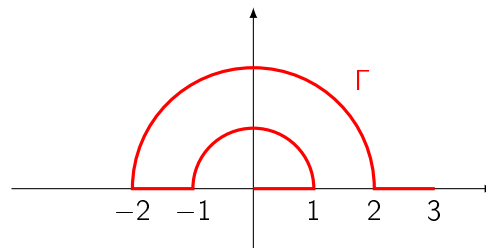
1. Man berechne die folgenden Kurvenintegrale 2. Art:

- (a) $\int_{\gamma} F$ wobei $F(x, y) = (x + y, x - y)^T$ und γ die von links nach rechts orientierten Parabel $y = x^2$ zwischen den Punkten $(-1, 1)$, und $(1, 1)$ ist
- (b) $\int_{\gamma} F$, wobei $F(x, y) = (0, xy^2)^T$ und γ die Ellipse $4x^2 + y^2 = 4$ ist, die einmal positiv durchlaufen wird

2. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} F, \quad F(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

entlang folgenden Weges Γ von $(0, 0)$ nach $(3, 0)$



3. Zu den folgenden Vektorfeldern in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ ist zu prüfen, ob es sich um Potentialfelder handelt und gegebenenfalls eine Stammfunktion zu bestimmen.

(a)

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 12xy + 3 \\ 6x^2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + z \\ -y - z \\ x - y \end{pmatrix}$$

(c)

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ ze^x \\ xy \ln z \end{pmatrix}$$

4. Man untersuche, welche der folgenden Differentialgleichungen exakt sind und löse diese!

(a) $tx' = tx^2 + x$

(b) $(2x + 2t^2)x' + 3t^2 + 4tx = 0, \quad x(0) = 1$

(c) $(te^x + t \cos(tx))x' + e^x + x \cos(tx) = 0$

5. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$t(t^2 + 3x^2 + 6x)x' + 3(t^2 + x^2) = 0. \quad (1)$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung nicht exakt ist.

(b) Die Differentialgleichung (1) besitzt einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(x)$. Finden Sie einen solchen und machen Sie die Differentialgleichung durch Multiplikation mit μ exakt.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1) in impliziter Form.