

Analysis 3 (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

5. Aufgabenblatt: Banachräume stetiger Funktionen und der Satz von Arzelà-Ascoli

Im Folgenden schreiben wir einfach $C[a, b]$ für den Raum $C([a, b]; \mathbb{R})$.

1. Man zeige, dass die Menge der Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) mit

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \quad x \in [0, 1]$$

beschränkt, aber nicht gleichgradig stetig in $C[0, 1]$ ist.

2. Sei $F : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für $x \in [0, 1]$ definieren wir $F_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F_x(y) := F(x, y) \quad y \in [0, 1].$$

Man zeige, dass die Menge $\{F_x : x \in [0, 1]\}$ gleichgradig stetig ist.

3. Sei $M \subseteq C[a, b]$ gleichgradig stetig. Man zeige, dass M dann sogar *gleichmäßig gleichgradig stetig* ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall x, y \in [a, b], f \in M : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

4. Sei $M \subseteq C[a, b]$ eine gleichgradig stetige Menge, so dass $\{f(x) : f \in M\} \subseteq \mathbb{R}$ für jedes $x \in [a, b]$ beschränkt ist. Man zeige, dass M beschränkt ist, d.h. es gibt ein $C > 0$, so dass

$$\forall x \in [a, b], f \in M : |f(x)| \leq C.$$

5. Sei $M \subseteq C[a, b]$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Alle Funktionen $f \in M$ sind differenzierbar auf (a, b) ,
- (ii) es gibt eine Konstante $C > 0$ mit

$$\forall x \in (a, b), f \in M : |f'(x)| \leq C,$$

- (iii) für ein $x_0 \in [a, b]$ ist $\{f(x_0) : f \in M\}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass M relativ folgenkompakt in $C[a, b]$ ist.

6. Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf $[0, 1]$ mit den Eigenschaften

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x \leq 1,$$

und

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_n$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält.