

Analysis 3 (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

6. Aufgabenblatt: Existenz- und Eindeigkeitssätze

1. Man zeige, dass $x_1(t) = 0$ und $x_2(t) = \operatorname{sgn} t \left(\frac{2}{3}|t|\right)^{3/2}$ beides Lösungen der Anfangswertaufgabe

$$x' = |x|^{1/3}, \quad x(0) = 0$$

sind. Warum widerspricht das nicht dem (Existenz- und) Eindeigkeitssatz von Picard-Lindelöf?

2. Man berechne die Picard-Iterierten zu den Anfangswertproblemen

(a) $x' = 2t(x + 1), \quad x(0) = 0,$

(b) $x' = tx + 1, \quad x(0) = 0.$

3. Auf $R := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq 1, |x| \leq 1\}$ sei die Funktion

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & t = 0, |x| \leq 1 \\ 2t & 0 < |t| \leq 1, -1 \leq x < 0 \\ 2t - 4\frac{x}{t} & 0 < |t| \leq 1, 0 \leq x \leq t^2 \\ -2t & 0 < |t| \leq 1, t^2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

gegeben.

- (a) Überlegen Sie sich, dass f auf R stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

- (b) Die Folge der Picard-Iterierten zum Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = 0 \tag{1}$$

lässt sich natürlich trotzdem bilden. Zeigen Sie, dass diese Folge nicht konvergiert.

- (c) Teilfolgen der Folge der Picard-Iterierten konvergieren gleichmäßig gegen gewisse Funktionen. Diese erfüllen aber nicht das Anfangswertproblem (1).

4. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = tx^3, \quad x(0) = 1 \tag{2}$$

auf $Q = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq \alpha, |x - 1| \leq \beta\}$ mit $\alpha, \beta > 0$.

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf die eindeutige *lokale* Lösbarkeit des Anfangswertproblems.

- (b) Zeigen Sie, dass $x(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$ Lösung von (2) ist.

- (c) Was können Sie über die *globale* Lösbarkeit des Anfangswertproblems folgern?