

Analysis 3 (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

7. Aufgabenblatt: Lineare Systeme von Differentialgleichungen

1. Auf dem Intervall $(0, \infty)$ sei das Differentialgleichungssystem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 3t \end{pmatrix} \quad (1)$$

gegeben.

- (a) Zeigen Sie, dass

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem für das zugehörige homogene System bildet.

- (b) Bestimmen Sie nun die Lösung des inhomogenen Systems (1) unter der Anfangsbedingung

$$x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Man berechne die Exponentialmatrix e^A für folgende Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3. Mit Hilfe der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zeige man, dass im Allgemeinen $e^A e^B \neq e^{A+B}$, falls A und B nicht kommutieren.

4. Man löse folgende Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

- (a)

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- (b)

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems.
- (b) Ermitteln Sie nun die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems.