

Partielle Differentialgleichungen für Nichtmathematiker

TU Bergakademie Freiberg

Dr. Gunter Semmler
Institut für Angewandte Analysis

Wintersemester 2025/26

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
1. Einführung	7
1.1. Begriff der partiellen Differentialgleichung	7
1.2. Klassifizierung von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung	9
1.3. Einige wichtige partielle Differentialgleichungen	11
1.3.1. Die Wärmeleitungsgleichung	11
1.3.2. Die Wellengleichung	15
1.3.3. Die Maxwell-Gleichungen	20
1.3.4. Partielle Differentialgleichungen der Strömungsmechanik	21
1.3.5. Balken- und Plattengleichung	23
1.4. Formulierungen in angepassten Koordinaten	24
1.4.1. Polarkoordinaten	24
1.4.2. Zylinderkoordinaten	26
1.4.3. Kugelkoordinaten	27
1.5. Nebenbedingungen	27
1.5.1. Korrekt gestellte Probleme	27
1.5.2. Anfangsbedingungen	29
1.5.3. Randbedingungen	30
1.5.4. Verträglichkeitsbedingungen	33
1.5.5. Weitere Nebenbedingungen	35
2. Die Fouriersche Methode	36
2.1. Der Separationsansatz	36
2.2. Sturm-Liouville-Theorie	37
2.3. Superposition von Produktlösungen	43
2.4. Zusammenfassung und weitere Beispiele	46
2.5. Besselfunktionen	49
3. Die Methode der Fouriertransformation	55
3.1. Einführung der Fouriertransformation	55
3.2. Anwendung auf partielle Differentialgleichungen	59
4. Die Methode der Laplacetransformation	63
4.1. Einführung der Laplacetransformation	63
4.2. Anwendung auf partielle Differentialgleichungen	69
A. Partielle Ableitungen und Operatoren der Vektoranalysis	71
B. Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen	74
Literatur	76
Stichwortverzeichnis	78

Vorwort

Beim Studium der partiellen Differentialgleichungen ist die physikalische Vorstellung in genau demselben Maße notwendig wie die geometrische Vorstellung für die Differential- und Integralrechnung.

aus dem Vorwort von [28]

Viele Probleme der mathematischen Physik führen auf partielle Differentialgleichungen. Wir wollen in dieser Vorlesung verstehen, warum das so ist und einige wichtige partielle Differentialgleichungen kennenlernen. Um diese Gleichungen zu lösen, werden drei Methoden vorgestellt: die Fouriersche Methode (siehe Kapitel 2), die Methode der Fouriertransformation (siehe Kapitel 3) und die Methode der Laplacetransformation (siehe Kapitel 4). Ziel der Veranstaltung ist es, ein Verständnis für den Begriff der partiellen Differentialgleichung und für die Effekte, die bei ihrer Lösung auftreten können, zu erlangen. Dabei beschränken wir uns im Wesentlichen auf klassische Fälle, die einer analytischen Behandlung zugänglich sind. Es ist kein Geheimnis, dass die meisten partiellen Differentialgleichungen nicht in geschlossener Form lösbar sind. Für die dann erforderlichen numerischen Methoden verweisen wir auf Vorlesungen zur Numerik. Der Kurs kann also auch als eine theoretische Vorbereitung auf solche weitergehenden Vorlesungen verstanden werden.

Als Voraussetzung für die Vorlesung wird auf Kenntnisse der Analysis (insbesondere der Funktionen mehrerer reeller Variabler) zurückgegriffen, wie sie im Rahmen der Grundvorlesungen zur Höheren Mathematik vermittelt wurden. Gewöhnliche Differentialgleichungen treten bei der Lösung partieller Gleichungen oft als Hilfsprobleme auf. Im einfachsten Fall ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Das wird ebenfalls aus den HM-Vorlesungen oder der Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen für Naturwissenschaftler“ als bekannt angenommen. In anderen Fällen treten gewöhnliche Differentialgleichungen mit singulären Koeffizienten auf, auf deren Lösung hier extra eingegangen wird.

Literatur

Die Literatur zu partiellen Differentialgleichungen ist sehr umfangreich. Für uns sind hier insbesondere Bücher interessant, die die analytischen Lösungsmethoden und Anwendungen auf Probleme aus Physik und Technik in den Vordergrund stellen. Die zahlreichen Bücher, die vorwiegend die Lösbarkeitstheorie in geeigneten Funktionenräumen oder die Numerik partieller Differentialgleichungen behandeln, sollen ganz unberücksichtigt bleiben.

Einige ältere Bücher, die immer noch gute Dienste leisten können, sind [7], [10], [24], [28]. Besonders hingewiesen sei auf die Bücher [19], [20] von Alfred Kneschke, der 1951-1969 Professor an der Bergakademie Freiberg war.

Aktuellere elementare Einführungen in deutscher Sprache sind [18], [21].

Einige ausführlich und anwendungsnah geschriebene Lehrbücher sind zwar für das amerikanische College konzipiert, aber durchaus für unsere Vorlesung geeignet. Dazu zählen [1], [3], [5], [6], [8], [9], [11], [14], [15], [16], [17], [22], [25], [26], [27].

Einige Bücher enthalten neben anderem Stoff der Höheren Mathematik auch eine Einführung in partielle Differentialgleichungen. Dazu gehört das didaktisch hervorragend aufgebaute und graphisch opulent ausgestattete Buch [2]. Weitere Werke in dieser Kategorie sind auch [4], [12], [13].

Die Themen dieser Vorlesung sind klassisch und meistens seit langem bekannt. Einen Ausblick auf modernere Anwendungen von partiellen Differentialgleichungen illustriert mit sehenswerten Fotos gibt [23].

Prüfungsbedingungen

Die Prüfung zum Modul „Partielle Differentialgleichungen für Nichtmathematiker“ findet in Form einer Klausur von 2h Dauer statt. Zugelassenes Hilfsmittel ist ein beidseitig selbst beschriebenes Blatt mit Notizen. Weitere Aufzeichnungen, Bücher und elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt.

1. Einführung

1.1. Begriff der partiellen Differentialgleichung

Eine *partielle Differentialgleichung* ist eine Gleichung, in die neben einer gesuchten Funktion u von mehreren Veränderlichen auch partielle Ableitungen dieser Funktion eingehen. Ist $u = u(x_1, \dots, x_n)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ definiert, so kann man die Gleichung in der Form

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

schreiben. In vielen Fällen lässt sich eine der Variablen als Zeit interpretieren. Wir schreiben dann

$$F(t, x_1, \dots, x_n, u, u_t, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{tt}, u_{tx_1}, \dots) = 0 \quad (1.2)$$

wobei nun $u = u(t, x_1, \dots, x_n)$ auf dem Zylinder $I \times G$ mit einem Zeitintervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist.

Zeitunabhängige Probleme der Form (1.1) heißen *stationär*, zeitabhängige Probleme der Form (1.2) dagegen *instationär*.

Man beachte: Hängt u nur von einer Variablen ab bzw. kommen in der Gleichung nur Ableitungen nach einer Variablen vor, so handelt es sich um keine partielle Differentialgleichung, sondern um eine gewöhnliche Differentialgleichung. Diese kommen in dieser Vorlesung nur als Hilfsprobleme zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen vor.

Die höchste in einer Gleichung vorkommende Ordnung einer partiellen Ableitung heißt *Ordnung* der partiellen Differentialgleichung.

Beispiel 1.1 Eine stationäre Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ hat die Gestalt

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

wobei wir hier statt x_1 und x_2 einfacher die Variablen x und y verwendet haben. Ein konkretes Beispiel für eine solche Gleichung ist die zweidimensionale *Laplacegleichung*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (1.3)$$

Zum Laplaceoperator Δ verweisen wir auf (A.7), die Bedeutung dieser Gleichung erklären wir in Kapitel ?? . Wir bemerken, dass in dieser Gleichung die Ableitungen nullter und erster Ordnung (u, u_x, u_y) gar nicht vorkommen.

Beispiel 1.2 Eine instationäre Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Intervall $G = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$ hat die Gestalt

$$F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}) = 0.$$

Ein konkretes Beispiel für eine solche Gleichung ist die *Saitenschwingungsgleichung*

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (1.4)$$

mit einer Konstanten $c > 0$. Zum Laplaceoperator Δ verweisen wir auf (A.6), die Bedeutung dieser Gleichung erklären wir in Kapitel 1.3.2. Auch hier kommen die Ableitungen nullter und erster Ordnung (u, u_t, u_x) gar nicht vor.

Eine partielle Differentialgleichung heißt *linear*, wenn u und die partiellen Ableitungen von u nur linear auftreten. Die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung für eine Funktion $u(x_1, \dots, x_n)$ sieht also so aus:

$$a + bu + \sum_{k=1}^n c_k u_{x_k} + \sum_{i,j=1}^n d_{ij} u_{x_i x_j} + \dots = 0, \quad (1.5)$$

wobei die Koeffizienten $a, b, c_k, d_{ij}, \dots$ von den Variablen $x_1, \dots, x_n$ abhängen dürfen, aber nicht von u und seinen partiellen Ableitungen.

Eine lineare partielle Differentialgleichung heißt *homogen*, falls in jedem Summand u oder eine partielle Ableitung von u auftritt, d.h. in der Darstellung (1.5) muß der Koeffizient a verschwinden. Ist die lineare Differentialgleichung nicht homogen, heißt sie *inhomogen*.

Beispiel 1.3 Die Laplacegleichung (1.3) und die Saitenschwingungsgleichung (1.22) sind homogene lineare partielle Differentialgleichungen.

Für homogene lineare Gleichungen gilt eine Eigenschaft, die Ihnen in analoger Form schon bei linearen Gleichungssystemen und gewöhnlichen Differentialgleichungen begegnet sein sollte, und die auch für partielle Differentialgleichungen leicht einzusehen ist:

Satz 1.1. Sind $u_1, u_2, \dots, u_k$ Lösungen einer homogenen linearen partiellen Differentialgleichung, so ist auch jede Linearkombination

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_k u_k$$

wieder Lösung derselben Gleichung.

Ersetzt man in (1.5) den Term a durch 0, erhält man die dieser inhomogenen Gleichung zugeordnete homogene Gleichung. Für sie gilt

Satz 1.2. Die Differenz zweier Lösungen einer inhomogenen linearen partiellen Differentialgleichung ist Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung. Umgekehrt ist die Summe aus einer Lösung der homogenen und einer Lösung der inhomogenen Gleichung immer Lösung der inhomogenen Gleichung.

Diese Sätze gestatten es uns also, aus bekannten Lösungen neue und allgemeinere Lösungen zusammenzusetzen. Auf diese Möglichkeit werden wir im Kapitel 2 zurückkommen.

Etwas allgemeiner als der Begriff der linearen partiellen Differentialgleichung ist der Begriff der quasilinearen Differentialgleichung. Eine partielle Differentialgleichung k -ter Ordnung heißt *quasilinear*, wenn die Ableitungen k -ter Ordnung nur linear vorkommen. Damit ist die Gleichung von der Form

$$\sum_{n_1, \dots, n_k=1}^n a_{n_1, \dots, n_k} u_{x_{n_1} \dots x_{n_k}} + b = 0 \quad (1.6)$$

wobei die Koeffizienten $a_{n_1, \dots, n_k}$ und b außer von $x_1, \dots, x_n$ auch von der Funktion u und ihren partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $k-1$ abhängen dürfen.

Beispiel 1.4 Die partielle Differentialgleichung

$$u u_{xy} - u_x u_y = 0$$

für die Funktion $u = u(x, y)$ ist eine quasilineare Gleichung zweiter Ordnung, die aber nicht linear ist.

1.2. Klassifizierung von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Eine *fastlineare* partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ ist von der Form

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + f(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0 \quad (1.7)$$

mit Koeffizienten $a_{ij} = a_{ij}(x_1, \dots, x_n)$. Dies ist ein Spezialfall der quasilinearen Differentialgleichung (1.6). Jede lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist auch fastlinear (vgl. hierzu (1.5)).

Die Eigenschaften dieser Gleichung werden maßgeblich durch die Koeffizienten a_{ij} bestimmt, die wir in einer Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

zusammenfassen. Diese Matrix hängt vom Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$ ab. Da wir stets $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ voraussetzen, kommt es in der fastlinearen Gleichung nur auf die Summe $a_{ij} + a_{ji}$ an, wir können deshalb annehmen, dass $a_{ij} = a_{ji}$ und somit die Matrix A symmetrisch ist. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass die (natürlich auch wieder von $x \in G$) abhängigen) Eigenwerte von A alle reell sind und es genau n Eigenwerte gibt, wenn man sie mit ihrer (geometrischen oder algebraischen) Vielfachheit aufführt. Sie seien deshalb mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bezeichnet.

Definition 1.1. Die fastlineare partielle Differentialgleichung (1.7) heißt im Punkt $x \in G$

- *elliptisch*, falls alle Eigenwert positiv oder alle Eigenwerte negativ sind,
- *hyperbolisch*, falls kein Eigenwert verschwindet und einer ein anderes Vorzeichen hat als die $(n - 1)$ übrigen,
- *parabolisch*, falls genau ein Eigenwert verschwindet und alle übrigen dasselbe Vorzeichen haben.

Ist die Gleichung (1.7) in jedem Punkt $x \in G$ elliptisch, spricht man einfach von einer elliptischen Gleichung. Analog wird das auch für die Begriffe hyperbolisch und parabolisch gehandhabt.

Beispiel 1.5 Der zweidimensionalen Laplacegleichung (1.3) wird in jedem Punkt die Einheitsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Ihre Eigenwerte sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, also ist die Gleichung elliptisch.

Beispiel 1.6 Der Saitenschwingungsgleichung (1.22) wird in jedem Punkt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Ihre Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -c^2 < 0$, also ist die Gleichung hyperbolisch.

Beispiel 1.7 Der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

wird in jedem Punkt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Ihre Eigenwerte sind $\lambda_1 = a^2 > 0$ und $\lambda_2 = 0$, also ist die Gleichung parabolisch. Ihre Bedeutung werden wir in Kapitel 1.3.1 erfahren.

Für fastlineare Gleichungen zweiter Ordnung mit zwei Variablen kann man den Typ auch ohne Berechnung der Eigenwerte direkt an den Koeffizienten ablesen. Wir betrachten dazu

$$\boxed{a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0} \quad (1.8)$$

für eine Funktion $u = u(x, y)$.

Satz 1.3. Die fastlineare partielle Differentialgleichung (1.8) ist in einem Punkt $(x, y) \in G$

- elliptisch falls $ac - b^2 > 0$,
- hyperbolisch falls $ac - b^2 < 0$,
- parabolisch falls $ac - b^2 = 0$.

Beweis. Der Differentialgleichung (1.8) wird die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Ihre Eigenwerte λ_1 und λ_2 sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 \quad (1.9)$$

Es ist nun (1.8) elliptisch (hyperbolisch, parabolisch) genau dann, wenn $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ($\lambda_1 \lambda_2 < 0$, $\lambda_1 \lambda_2 = 0$). Der obigen Darstellung (1.9) entnehmen wir $P(0) = ac - b^2$. Andererseits lässt sich P mittels $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ in Linearfaktoren zerlegen, so dass $P(0) = \lambda_1 \lambda_2$. Weil somit $\lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2$ folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel 1.8 Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$u_{xy} = 0$$

für die Funktion $u = u(x, y)$. Vergleich mit (1.8) ergibt dass hier $a = c = 0$ und $b = 1/2$. Also ist

$$ac - b^2 = -\frac{1}{4} < 0$$

und damit die Gleichung hyperbolisch.

1.3. Einige wichtige partielle Differentialgleichungen

1.3.1. Die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten einen Stab der Länge L , der entlang seines Mantels vollständig gegen die Umgebung isoliert ist und der an verschiedenen Stellen unterschiedlich warm ist. Aufgrund der Temperaturunterschiede beginnt nun die Wärme im Stab zu fließen und wir beobachten eine zeit- und ortsabhängige Temperaturverteilung. Diese wollen wir genauer beschreiben. Wir nehmen an, der Stab ist so dünn, dass Temperaturunterschiede an verschiedenen Stellen desselben Querschnitts vernachlässigbar sind, und beschreiben die Temperatur deshalb am Ort x ($0 \leq x \leq L$) zur Zeit t durch eine Funktion $u(t, x)$. Es wird sich erweisen, dass u einer partiellen Differentialgleichung genügt, die wir nun herleiten wollen.

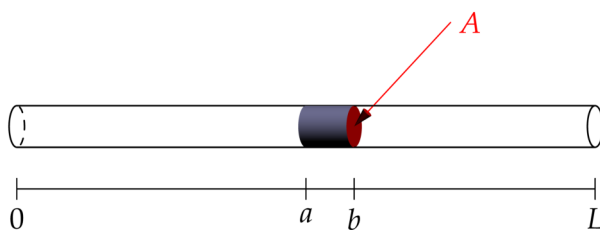


Abbildung 1.1: Der wärmeleitende Stab

Der Wärmefluß q durch einen Querschnitt am Ort x in Richtung x -Achse ist zur Zeit t nach dem *Fourierschen Gesetz* gegeben durch

$$q(t, x) = -ku_x(t, x), \quad (1.10)$$

wobei k die Wärmeleitzahl des Stabmaterials ist. Der Wärmefluß gibt die pro Zeiteinheit und Flächeneinheit durch einen Querschnitt strömende Wärmemenge an. Man mache sich dieses Gesetz für mit x steigende (fallende, konstante) Temperatur (also $u_x > 0$, $u_x < 0$ und $u_x = 0$) plausibel!

Betrachten wir nun einen Teilabschnitt des Stabes, dargestellt durch ein Intervall $[a, b]$ mit $0 \leq a < b \leq L$. Die pro Zeiteinheit über die beiden Enden des Abschnittes hineinfließende Wärme ist $A(q(t, a) - q(t, b)) = kA(u_x(t, b) - u_x(t, a))$, wobei A die Querschnittsfläche des Stabes ist. Nach Energieerhaltungssatz ist dies gleichzeitig die Änderung der im Inneren des Abschnitts gespeicherten Wärme. Diese kann man mit der spezifischen Wärmekapazität c , der Dichte ρ und dem Querschnitt A des Stabes ausgedrückt werden durch

$$\int_a^b c\rho Au(t, x) dx.$$

Damit kommen wir zu der Gleichheit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b c\rho Au(t, x) dx = kA(u_x(t, b) - u_x(t, a)).$$

Wir differenzieren links unter dem Integralzeichen¹ und schreiben die rechte Seite als Integral:

$$\int_a^b c\rho u_t(t, x) dx = k \int_a^b u_{xx}(t, x) dx.$$

¹Das ist möglich, wenn wir u_t als stetig annehmen.

Damit ist

$$\int_a^b (c\varrho u_t(t, x) - k u_{xx}(t, x)) dx = 0$$

für alle Teilintervalle $[a, b]$. Wir folgern daraus dass

$$c\varrho u_t(t, x) - k u_{xx}(t, x) = 0$$

und damit

$$\boxed{u_t = a^2 u_{xx}} \quad (1.11)$$

wobei

$$a^2 := \frac{k}{c\varrho} \quad (1.12)$$

eine Konstante ist, die Materialeigenschaften des Stabes zusammenfasst. (1.11) heißt *eindimensionale Wärmeleitungsgleichung* und ist eine lineare homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Sie ist das Standardbeispiel einer parabolischen Gleichung, siehe dazu auch Beispiel 1.7.

Bemerkung 1.1. Nimmt man nicht mehr an, der Stab ist isoliert, sondern es wird ihm Wärme zugeführt, so führt uns diese Betrachtung auf die *inhomogene Wärmeleitungsgleichung*

$$\boxed{u_t = a^2 u_{xx} + f(t, x)}, \quad (1.13)$$

wobei f die Dichte der Wärmequellen ist. ($f < 0$ beschreibt natürlich eine Kühlung des Stabes.) Die in (1.13) vorgegebene Funktion f heißt daher allgemein eine *Quelle*.

Bemerkung 1.2. Die Wärmeleitungsgleichung (1.11) bzw. (1.13) beschreibt die Funktion u noch nicht vollständig. Wir müssen dazu noch vorgeben, wie die Temperaturverteilung im Stab zum Anfangszeitpunkt des Prozesses aussieht und wir müssen die Beschaffenheit der Stabenden beschreiben, d.h. ob diese auch isoliert sein sollen oder ob hier Wärmeaustausch mit der Umgebung möglich ist. Mehr dazu folgt im Kapitel 1.5.

Wir betrachten nun allgemeiner die Wärmeleitung in einem dreidimensionalen Körper K . Die zeit- und ortsabhängige Temperatur ist nun eine Funktion $u(t, x, y, z)$ mit $(x, y, z) \in K$. Der Wärmefluss ist in diesem Fall ein orts- und zeitabhängiger Vektor q , der sich nach dem *Fourierschen Gesetz* aus

$$q = -k \operatorname{grad} u \quad (1.14)$$

ergibt, wobei k wieder die Wärmeleitzahl ist. Diese Form des Fourierschen Gesetzes ist klarerweise eine Verallgemeinerung von (1.10). Die Wärme fließt also immer in Richtung des steilsten Temperaturabfalls. Denkt man sich ein kleines Volumen $G \subset K$ mit Oberfläche ∂G , so fließt pro Zeiteinheit

$$\int_{\partial G} q \cdot d\vec{\eta} = - \int_{\partial G} k \operatorname{grad} u \cdot d\vec{\eta}$$

Wärme über den Rand nach außen, wenn der Normalenvektor auf ∂G wie üblich nach außen zeigt. Dieses Integral lässt sich nun mit Hilfe des Gaußschen Satzes (A.4) und der Definition des Laplaceoperators (A.5) umwandeln in

$$\int_{\partial G} q \cdot d\vec{\eta} = - \int_G \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) d(x, y, z) = -k \int_G \Delta u d(x, y, z),$$

wobei wir die Konstante k vor das Integral ziehen konnten (vgl. Bemerkung 1.5). Andererseits ist die zeitliche Änderung der Wärmemenge im Inneren von G gleich

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_G c \varrho u(t, x, y, z) d(x, y, z) = \int_G c \varrho u_t(t, x, y, z) d(x, y, z).$$

Die zeitliche Änderung dieser Wärmemenge im Inneren ist bis auf das Vorzeichen gleich der abfließenden Wärme, also erhalten wir

$$\int_G c \varrho u_t(t, x, y, z) d(x, y, z) = k \int_G \Delta u d(x, y, z)$$

und damit

$$\int_G (c \varrho u_t - k \Delta u) d(x, y, z) = 0.$$

Weil dies für beliebiges G gilt, muß wieder der Integrand verschwinden, d.h.

$$c \varrho u_t - k \Delta u = 0.$$

Mit der Konstanten a aus (1.12) sind wir damit bei der *dreidimensionalen Wärmeleitungsgleichung*

$$\boxed{u_t = a^2 \Delta u} \quad (1.15)$$

oder ausgeschrieben

$$\boxed{u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})} \quad (1.16)$$

angelangt. Es handelt sich um eine lineare homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom parabolischen Typ.

Bemerkung 1.3. Liegt eine Quelle vor, d.h. wird innerhalb von K Wärme produziert oder verschwindet, so gelangt man zu der allgemeineren inhomogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\boxed{u_t = a^2 \Delta u + f(t, x, y, z).} \quad (1.17)$$

Bemerkung 1.4. Die eindimensionalen Wärmeleitungsgleichungen (1.11) und (1.13) lassen sich ebenfalls in der Form $u_t = a^2 \Delta u$ bzw. $u_t = a^2 \Delta u + f$ schreiben, wenn man bedenkt, dass sich für $u = u(t, x)$ der Laplaceoperator nach (A.6) berechnet. Es ist nun auch klar, dass sich ebene Wärmeleitvorgänge durch die *zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung*

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(t, x, y)$$

beschreiben lassen.

Bemerkung 1.5. Bei der Herleitung wurde benutzt, dass die Wärmeleitzahl k , die Dichte ϱ und die Wärmekapazität c Konstanten sind. Bei inhomogenen Körpern muß dies aber nicht der Fall sein. Man kommt dann zu der allgemeineren Form

$$c \varrho u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + f \quad (1.18)$$

der Wärmeleitungsgleichung. c und k können sogar von u abhängen, dann ist (1.18) nicht mehr linear, sondern nur noch quasilinear.

Bemerkung 1.6. Auch im zwei- und dreidimensionalen Fall beschreibt die Wärmeleitungsgleichung allein die Temperaturverteilung u noch nicht eindeutig. Wir müssen zudem die Temperaturverteilung in K zu einem Anfangszeitpunkt und das Wärmeübergangsverhalten am Rand ∂K kennen. Darauf gehen wir in Kapitel 1.5 genauer ein.

Die hier angegebenen partiellen Differentialgleichungen beschreiben nicht nur Wärmeleitvorgänge, sondern auch Diffusionsprozesse, bei denen sich die Konzentration einer Substanz innerhalb eines Bereichs zeitlich und räumlich ändert. $u = u(t, x, y, z)$ bedeutet dann die Konzentration des Stoffes zur Zeit t am Ort (x, y, z) , (1.14) wird ersetzt durch das *Ficksche Gesetz*

$$I = -D \operatorname{grad} u$$

worin I die Stromdichte und D den Diffusionskoeffizient bedeutet. Damit kann man wie oben unter Verwendung des Masseerhaltung zeigen, dass u der partiellen Differentialgleichung

$$u_t = D\Delta u$$

bzw.

$$u_t = D\Delta u + f$$

(wenn noch zusätzlich Substanz erzeugt oder vernichtet wird) genügt. Wir nennen diese Gleichung deshalb auch *Diffusionsgleichung*. Mathematisch führen also Wärmeleitung und Diffusion auf dasselbe Problem, nur die physikalische Interpretation der Gleichungen ist anders.

Bei vielen Wärmeleitvorgängen stellt sich nach langer Zeit eine nahezu zeitlich konstante Temperaturverteilung ein. Wir wollen uns überlegen, durch welche partielle Differentialgleichung diese beschrieben wird. Offenbar braucht man dazu nur die Zeitabhängigkeit der Funktion u und alle Ableitungen nach t weglassen. Geht man von der homogenen Wärmeleitungsgleichung (1.15) aus, so genügt also die stationäre Wärmeverteilung im Körper K der dreidimensionalen *Laplacegleichung*

$$\boxed{\Delta u = 0} \tag{1.19}$$

mit $u = u(x, y, z)$. Diese ist eine homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typ. Analoges gilt auch im ein- und zweidimensionalen Fall.

Betrachtet man dagegen die inhomogene Wärmeleitungsgleichung (1.17), so ist wegen der Zeitabhängigkeit der Quelle f im allgemeinen keine stationäre Wärmeverteilung zu erwarten. Ist f jedoch zeitunabhängig (also $f = f(x, y, z)$), so genügt die stationäre Wärmeverteilung der partiellen Differentialgleichung

$$\boxed{\Delta u = -\frac{1}{a^2} f(x, y, z)}. \tag{1.20}$$

(1.20) heißt *Poissongleichung* und ist eine lineare inhomogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typ. Analoges gilt auch im zweidimensionalen Fall. Im eindimensionalen würde eine Gleichung entstehen, in der u nur noch von x abhängt, dies ist keine partielle Differentialgleichung mehr, sondern eine gewöhnliche.

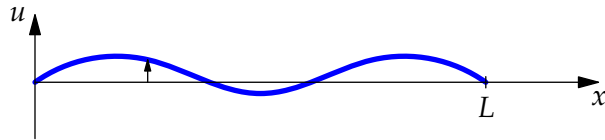


Abbildung 1.2: Die schwingende Saite

1.3.2. Die Wellengleichung

Wir betrachten eine dünne Saite der Länge L , die an ihren Enden eingespannt ist und dazwischen frei schwingen kann. Sei $u(t, x)$ die Auslenkung der Saite am Ort x . Diese Auslenkung sei klein und erfolge ausschließlich senkrecht zur x -Achse, siehe Abbildung 1.2.

Die Saite leiste aufgrund ihrer Dünnhheit keinen Widerstand gegen Verbiegung, sondern schwingt nur, weil sie sich elastisch zusammenzieht. Dabei können wir die elastische Kraft P , die in jedem Punkt wirkt (auch Vorspannung genannt) als konstant ansehen. Außerdem ist sie in allen Punkten tangential zur Saite gerichtet. Auf die Auslenkung der Saite wirkt nur ihre Komponente, die senkrecht auf der x -Achse steht. Betrachten wir einen kleinen Ausschnitt der Saite zwischen x und $x + \Delta x$. Die auf ihn wirkende Kraft ist also

$$P \sin \vartheta_2 - P \sin \vartheta_1,$$

siehe dazu Abbildung 1.3.

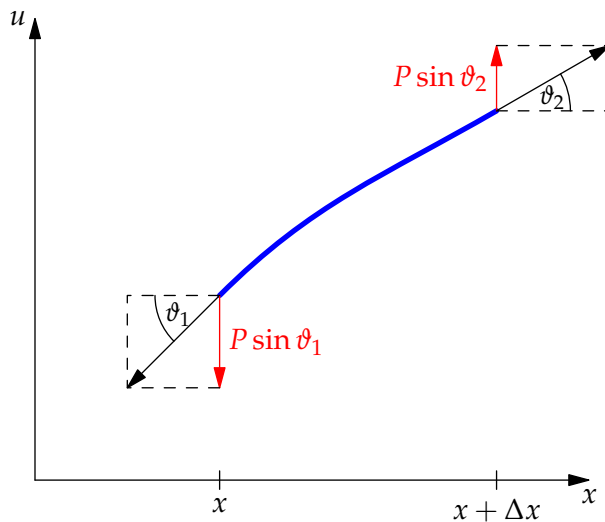


Abbildung 1.3: Kräfte an der schwingenden Saite

Nun gilt für kleine Winkel

$$\begin{aligned} \sin \vartheta_1 &\approx \tan \vartheta_1 = u_x(t, x) \\ \sin \vartheta_2 &\approx \tan \vartheta_2 = u_x(t, x + \Delta x), \end{aligned}$$

damit ist die Kraft gleich

$$P(u_x(t, x + \Delta x) - u_x(t, x)). \quad (1.21)$$

Andererseits ist die Masse des Saitenstücks $\varrho \Delta x$, wobei ϱ die Längendichte der Saite ist. Multipliziert man diese Masse mit der Beschleunigung u_{tt} erhält man ebenfalls die auf das Saitenstück wirkende Kraft. Gleichsetzen mit (1.21) liefert

$$\varrho \Delta x u_{tt} = P(u_x(t, x + \Delta x) - u_x(t, x)).$$

Dividiert man diese Gleichung durch Δx und lässt dann Δx gegen 0 streben, erhält man

$$\varrho u_{tt} = P u_{xx}.$$

Mit der Abkürzung

$$c^2 := \frac{P}{\varrho}$$

steht schließlich die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (1.22)$$

da, die *Saitenschwingungsgleichung* oder *eindimensionale Wellengleichung* heißt. Es handelt sich dabei um eine lineare homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typ (vgl. dazu die Beispiele 1.2, 1.3, 1.6). Wegen (A.6) kann die Gleichung auch in der Form

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad (1.23)$$

geschrieben werden.

Die Saitenschwingungsgleichung (1.22) gestattet folgende intuitive Interpretation: Durch die zweite Ableitung wird bekanntlich das Krümmungsverhalten einer Funktion beschrieben. So ist die Saite in einem Teilintervall von $[0, L]$ konvex, wenn dort $u_{xx} > 0$ gilt. Falls jedoch $u_{xx} < 0$ ist, so ist die Saite dort konkav. Die Übergangspunkte, an denen konkaves Verhalten in konvexes übergeht oder umgekehrt, sind die Wendepunkte; an ihnen gilt notwendigerweise $u_{xx} = 0$. Entsprechend der Gleichung (1.22) erfährt die Saite in konvexen Bereichen eine nach oben gerichtete Beschleunigung und damit Kraft, in konkaven Bereichen ist die Kraft dagegen nach unten gerichtet, siehe Abbildung 1.4. Die Saitenschwingungsgleichung drückt also das Bestreben der Saite aus, ihrer Krümmung entgegenzuwirken.

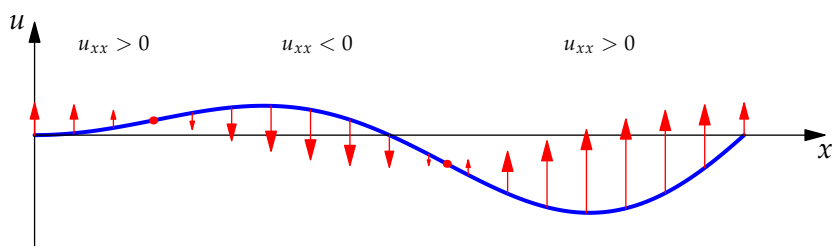


Abbildung 1.4: Kräfte auf die Saite in konvexen und konkaven Abschnitten

Bemerkung 1.7. Bei unserer Herleitung haben wir vorausgesetzt, dass die Saite homogen ist. Hat sie dagegen eine ortsabhängige Dichte, so werden wir auf eine partielle Differentialgleichung der Form

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} [c(x)^2 u_x]$$

geführt.

Verschiedene Modifikationen der Gleichung (1.22) gestatten die Einbeziehung weiterer Effekte.

- die *inhomogene Saitenschwingungsgleichung*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(t, x) \quad (1.24)$$

berücksichtigt den zusätzlichen Einfluss einer äußeren Kraft auf die Saite. Darunter kann man sich beispielsweise folgendes vorstellen:

- die Gravitationskraft,
- äußere Impulse, die zu gewissen Zeiten an gewissen Orten auf die Saite einwirken,
- Anregung durch Schallwellen.
- Befindet sich die Saite in einem Medium, das eine Reibungskraft verursacht, die proportional zur Geschwindigkeit ist und auf die Saitenbewegung bremsend wirkt, so haben wir die *gedämpfte Saitenschwingungsgleichung* oder *gedämpfte Wellengleichung*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - \beta u_t \quad (1.25)$$

mit $\beta > 0$ zu untersuchen.

- Versucht eine elastische Kraft die Auslenkung der Saite aus der Ruhelage zu verhindern, so kommen wir zur partiellen Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - ku, \quad (1.26)$$

mit einer Konstanten $k > 0$, vorausgesetzt es gilt das *Hooksche Gesetz*, nach dem die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist.

Wollen wir diese drei Zusatzeffekte alle gleichzeitig in einer Gleichung zulassen, müssen wir natürlich die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - \beta u_t - ku + f(t, x) \quad (1.27)$$

untersuchen, die aus Gründen, die wir später anführen, auch *Telegraphengleichung* heißt.

Bemerkung 1.8. Die verschiedenen Arten der Wellengleichung beschreiben das Verhalten der Saite noch nicht eindeutig. Wir brauchen zudem Informationen darüber, wie die Saite zum Schwingen angeregt wird, und wie sie an den Enden eingespannt ist. Darauf gehen wir in Kapitel 1.5 genauer ein.

Der Name Wellengleichung für die partielle Differentialgleichung (1.22) rührt daher, dass sie neben den Bewegungen einer Saite auch in einigen anderen physikalischen Situationen vorkommt, in denen Schwingungsvorgänge eine Rolle spielen. Wir wollen einige dieser Situationen beschreiben:

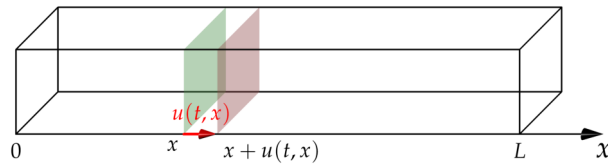


Abbildung 1.5: Longitudinalschwingungen eines Stabes

- Wir betrachten einen elastischen Stab mit Länge L und konstantem Querschnitt A , der aus seiner Ruhelage entlang der x -Achse ausgelenkt wurde und sich nun infolge der Spannkraften in eben dieser Richtung bewegt. $u(t, x)$ bezeichne nun die Verschiebung eines Querschnitts, der sich im undeformierten Zustand an der Position x befindet, zur Zeit t , siehe Abbildung 1.5. Die sich entwickelnden Bewegungen des Stabes nennt man *Longitudinalschwingungen*. Betrachtet man eine dünne Scheibe des Stabes mit Dicke dx , so wird diese Dicke um den Wert $du = u_x(t, x) dx$ geändert. Durch diese Deformation tritt nun eine Spannkraft auf, die wir als proportional zur Längenänderung ansehen, genauer gesagt ist diese

$$P(t, x) = EAu_x(t, x), \quad P(t, x + \Delta x) = EAu_x(t, x + \Delta x),$$

wobei E der Elastizitätsmodul ist. Auf den Abschnitt des Stabes zwischen x und $x + \Delta x$ wirkt also die resultierende Kraft

$$P(t, x + \Delta x) - P(t, x) = EAu_x(t, x + \Delta x) - EAu_x(t, x)$$

Setzt man dies gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung, also $\varrho A \Delta x u_{tt}$ mit der konstanten Dichte ϱ des Stabmaterials, so erhält man

$$\varrho A \Delta x u_{tt} = EA(u_x(t, x + \Delta x) - u_x(t, x)).$$

Division durch Δx und Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ liefert wieder die Wellengleichung (1.22), wobei diesmal aber

$$c^2 := \frac{E}{\varrho}$$

gesetzt wurde.

- Wir betrachten nun einen homogenen Zylinder, der um seine Drehachse ausgelenkt wird. $u(t, x)$ sei dabei die Winkelauslenkung des Querschnitts am Ort x zur Zeit t , siehe Abbildung 1.6. Der Zylinder kann also *Torsionsschwingungen* ausführen.

Wir geben ohne Herleitung an, dass auch hier u der Wellengleichung (1.22) genügt, mit einer gewissen Konstanten c , die vom Stabmaterial und -querschnitt abhängt.

Nach diesen eindimensionalen Betrachtungen kommen wir nun zu zweidimensionalen Problemen. Dazu betrachten wir eine am Rand fest eingespannte dünne Membran („Trommelfell“), die ansonsten in vertikaler Richtung schwingen kann. Wir bezeichnen ihr Auslenkung mit $u(t, x, y)$, wobei $(x, y) \in G$, siehe Abbildung 1.7,

Wir setzen voraus, dass die Membran keinen Widerstand gegen Verbiegungen leistet, sich aber aufgrund ihrer elastischen Eigenschaften wieder zusammenzuziehen versucht. Die in jedem Punkt der Membran wirkende elastische Kraft (Vorspannung) kann als konstant angesehen werden, wenn

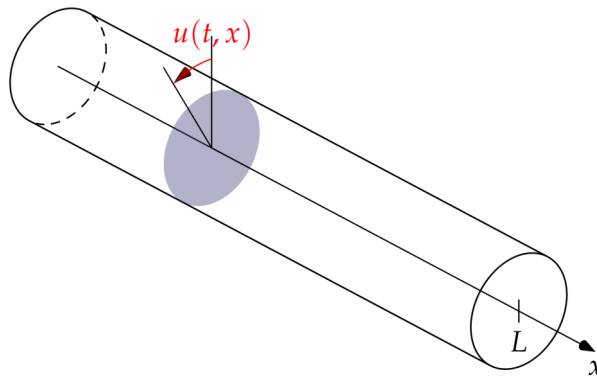


Abbildung 1.6: Torsionsschwingungen eines Zylinders

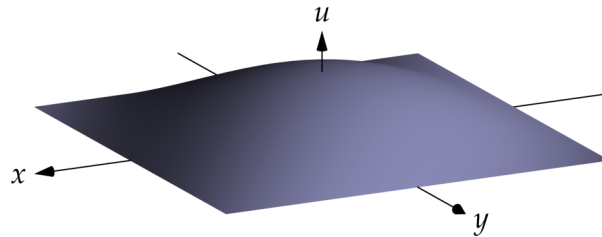


Abbildung 1.7: Auslenkungen einer Membran

wir uns auf kleine Auslenkungen beschränken. Ähnliche Betrachtungen wie bei der Saite führen dann auf

$$u_{tt} = c^2 \Delta u = c^2 (u_{xx} + u_{yy}), \quad (1.28)$$

die sogenannte *Membrangleichung* oder *zweidimensionale Wellengleichung*. Sie stellt das zweidimensionale Analogon zur Saitenschwingungsgleichung dar und ist ebenfalls eine lineare homogene partielle Differentialgleichung vom hyperbolischen Typ. Sämtliche Varianten der eindimensionalen Gleichung, die wir in den Gleichungen (1.24) bis (1.27) betrachtet haben, gibt es sinngemäß auch für die Membrangleichung.

Befindet sich die Membran in Ruhe, so können die Variable t und Ableitungen nach dieser weggelassen werden. Die stationäre Gleichung zu (1.28) ist dann wieder die *Laplacegleichung*

$$\Delta u = 0 \quad (1.29)$$

für $u = u(x, y)$. Die später zu besprechenden Nebenbedingungen können dabei verhindern, dass diese Gleichung nur die Lösung $u = 0$ hat. Die inhomogene Membrangleichung $u_{tt} = c^2 \Delta u + f$ führt dagegen bei zeitunabhängiger (!) Quelle f auf die *Poissongleichung*

$$\Delta u = -\frac{1}{c^2} f(x, y).$$

Natürlich gibt es auch noch eine *dreidimensionale Wellengleichung*

$$u_{tt} = c^2 \Delta u = c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad (1.30)$$

und davon abgeleitete Varianten. Beispiele für ihr Auftreten werden wir in den Kapiteln 1.3.3 und 1.3.4 kennenlernen.

1.3.3. Die Maxwell-Gleichungen

Bei den *Maxwell-Gleichungen* handelt es sich um die grundlegenden Gleichungen der Elektrodynamik, die das bei gegebener Ladungsdichte ϱ und gegebener Stromdichte j entstehende elektrische Feld E und das magnetische Feld H beschreiben. Dabei sind E, H, j dreidimensionale Vektorfunktionen und ϱ eine skalare Funktion von der Zeit t und räumlichen Variablen x, y und z . Die Gleichungen lauten in isotropen Medien im cgs-System

$$(\mu H)_t + c \operatorname{rot} E = 0 \quad (1.31)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon E) = 4\pi\varrho \quad (1.32)$$

$$(\varepsilon E)_t - c \operatorname{rot} H = -4\pi j \quad (1.33)$$

$$\operatorname{div}(\mu H) = 0. \quad (1.34)$$

Hierin sind ε die Dielektrizitätskonstante, μ die Permeabilität und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Bezüglich der Operatoren div und rot verweisen wir auf (A.3) bzw. (A.9). Die Gleichungen (1.31) bis (1.34) stellen ein instationäres, lineares System partieller Differentialgleichungen dar. Eine tiefergehende Behandlung ist nicht Gegenstand dieses Kurses, wir wollen aber einfache Spezialfälle betrachten.

Im Vakuum gilt $\mu = 1, \varepsilon = 1, \varrho = 0, j = 0$. Damit lauten die vier Gleichungen

$$H_t = -c \operatorname{rot} E \quad (1.35)$$

$$\operatorname{div} E = 0 \quad (1.36)$$

$$E_t = c \operatorname{rot} H \quad (1.37)$$

$$\operatorname{div} H = 0. \quad (1.38)$$

Differentiation von (1.35) ergibt

$$H_{tt} = -c \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} E = -c \operatorname{rot} E_t.$$

Setzt man nun (1.37) ein und benutzt (A.10), ergibt sich

$$H_{tt} = -c \operatorname{rot}(c \operatorname{rot} H) = -c^2 (\operatorname{grad} \operatorname{div} H - \Delta H) \stackrel{(1.38)}{=} c^2 \Delta H,$$

d.h. H und damit alle drei Komponenten von H erfüllen die dreidimensionale Wellengleichung (1.30).

Differentiation von (1.37) ergibt

$$E_{tt} = c \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} H = c \operatorname{rot} H_t.$$

Setzt man nun (1.35) ein und benutzt (A.10), ergibt sich

$$E_{tt} = c \operatorname{rot}(-c \operatorname{rot} E) = -c^2 (\operatorname{grad} \operatorname{div} E - \Delta E) \stackrel{(1.36)}{=} c^2 \Delta E,$$

d.h. E und damit alle drei Komponenten von E erfüllen ebenfalls die dreidimensionale Wellengleichung (1.30).

In der Elektrostatik geht man davon aus, dass alle Größen stationär sind und keine Strom fließt ($j = 0$). Dann lautet (1.31) einfach $\operatorname{rot} E = 0$, d.h. E ist ein Potentialfeld und hat daher die Darstellung $E = -\operatorname{grad} u$. Setzt man das in (1.32) ein folgt

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) = -4\pi\rho.$$

Ist die materialabhängige Funktion ε konstant, erhalten wir wieder dank (A.5)

$$\Delta u = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

also die *Poissongleichung*. Gilt für die Ladungsdichte $\rho = 0$ (ist beispielsweise außerhalb eines geladenen Körpers erfüllt), folgt sogar

$$\Delta u = 0,$$

also die *Laplacegleichung*, die aus diesem Grunde auch *Potentialgleichung* genannt wird.

1.3.4. Partielle Differentialgleichungen der Strömungsmechanik

Ein strömendes Medium (Flüssigkeit oder Gas), kann durch ein Geschwindigkeitsfeld v beschrieben werden, dass von der Zeit t und dem Ort (x_1, x_2, x_3) in einem Gebietes $G \subset \mathbb{R}^3$ abhängt, siehe Abbildung 1.8.

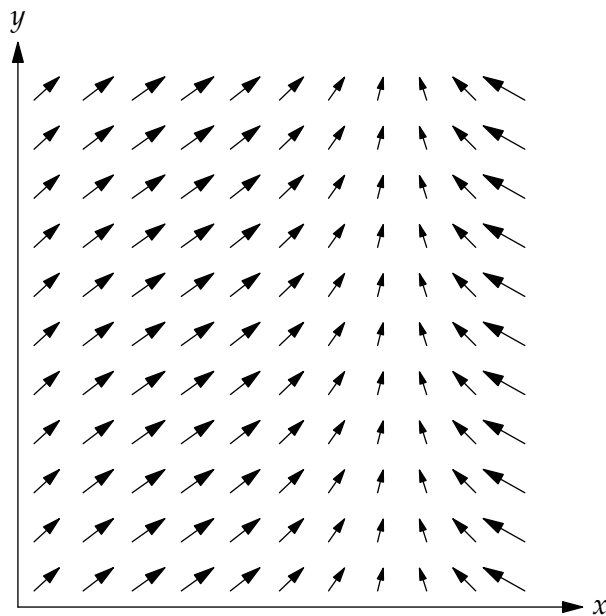


Abbildung 1.8: Zweidimensionale Veranschaulichung des Geschwindigkeitsfeldes eines strömenden Mediums

Für ein reibungsfreies, elastisches Fluid ergeben sich aus dem Impulserhaltungssatz die *Eulerschen Gleichungen*

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \text{grad})v + \frac{1}{\varrho} \text{grad } p = k} \quad (1.39)$$

wobei $\varrho(t, x_1, x_2, x_3)$ die Dichte, $p(t, x_1, x_2, x_3)$ der Druck und $k(t, x_1, x_2, x_3)$ eine Beschleunigung hervorgerufen durch eine äußere Kraft sind. In Komponenten ausgeschrieben steht (1.39) für die drei Gleichungen

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = k_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Diese partiellen Differentialgleichungen sind nichtlinear. Durch die Oberfläche eines gedachten Volumens K strebt pro Zeiteinheit die Masse

$$\int_{\partial K} \varrho v \cdot d\eta = \int_K \text{div}(\varrho v) d(x_1, x_2, x_3)$$

nach außen, bei der Umformung wurde wieder der Gaußsche Satz (A.4) verwendet. Andererseits ist in K die Masse

$$\int_K \varrho d(x_1, x_2, x_3)$$

enthalten. Aus dem Massenerhaltungssatz folgt damit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_K \varrho d(x_1, x_2, x_3) = - \int_K \text{div}(\varrho v) d(x_1, x_2, x_3)$$

und daher

$$\int_K (\varrho_t + \text{div}(\varrho v)) d(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Da K beliebig ist, haben wir die *Kontinuitätsgleichung*

$$\boxed{\varrho_t + \text{div}(\varrho v) = 0} \quad (1.40)$$

gezeigt. Zu den Gleichungen (1.39) und (1.40) kommt nun noch ein Zusammenhang $F(\varrho, p) = 0$ zwischen Druck und Dichte, z.B. die Zustandsgleichung $p = K\varrho^\gamma$ für polytrope Gase ($K > 0$, $\gamma > 1$ sind Konstanten) oder $\varrho = \text{const}$ für inkompressible Flüssigkeiten. Eine allgemeine Behandlung dieses Systems aus partiellen Differentialgleichung ist in dieser Einführung nicht möglich.

Wir wollen nun die linearisierte Ausbreitung von Schall in einem kompressiblen Medium wie Luft beschreiben. Dazu nehmen wir an, die Zustandsgleichung liefert uns eine Funktion $p = p(\varrho)$ und damit nach der Kettenregel $\text{grad } p = p'(\varrho) \text{grad } \varrho$. Wir nehmen an, die Dichte weiche nur wenig von einem gewissen Wert ϱ_0 ab und $p'(\varrho_0) > 0$. Dann können wir $\text{grad } p$ in (1.39) näherungsweise durch $p'(\varrho_0) \text{grad } \varrho$ ersetzen und erhalten durch zusätzliches Vernachlässigen des nichtlinearen zweiten Summanden

$$v_t + \frac{p'(\varrho_0)}{\varrho_0} \text{grad } \varrho = 0. \quad (1.41)$$

In (1.40) ersetzen wir ϱ durch die Konstante ϱ_0 und erhalten

$$\varrho_t + \varrho_0 \text{div } v = 0. \quad (1.42)$$

Differentiation von (1.41) nach t und Einsetzen von (1.42) liefert

$$v_{tt} = -\frac{p'(\varrho_0)}{\varrho_0} \text{grad } \varrho_t = -\frac{p'(\varrho_0)}{\varrho_0} \text{grad } (-\varrho_0 \text{div } v) = p'(\varrho_0) \text{grad div } v.$$

Wir nehmen weiter an, das Geschwindigkeitsfeld ist rotationsfrei, $\text{rot } v = 0$. In diesem Falle ergibt die Identität (A.10) dass $\text{grad div } v = \Delta v$ und wir erhalten

$$v_{tt} = p'(\varrho_0) \Delta v.$$

Also erfüllt v und damit auch jede Komponente von v die dreidimensionale Wellengleichung (1.30) mit

$$c^2 := p'(\varrho_0). \quad (1.43)$$

Differentiation von (1.42) nach t und Einsetzen von (1.41) liefert

$$\varrho_{tt} = -\varrho_0 \text{div } v_t = -\varrho_0 \text{div} \left(-\frac{p'(\varrho_0)}{\varrho_0} \text{grad } \varrho \right) = p'(\varrho_0) \Delta \varrho$$

wegen (A.5). Also erfüllt ϱ die dreidimensionale Wellengleichung (1.30) mit c wieder gegeben durch (1.43).

Damit haben wir erhalten, dass Schallwellen und elektromagnetische Wellen durch dieselbe mathematische Gleichung beschrieben werden, nur der physikalische Hintergrund ist ein anderer.

Falls die Schallausbreitung nur in einer Dimension erfolgt, etwa durch Longitudinalwellen in einem dünnen Rohr, so erhält man selbstverständlich, dass v und ϱ der eindimensionalen Wellengleichung (1.23) genügen.

Wir betrachten nun eine stationäre Strömung (d.h. v hängt nicht von t ab) einer inkompressiblen Flüssigkeit. Die Kontinuitätsgleichung (1.40) ergibt in diesem Fall $\text{div } v = 0$. Ist das Geschwindigkeitsfeld außerdem wirbelfrei (d.h. $\text{rot } v = 0$), existiert ein Potential u mit $v = -\text{grad } u$. Eine solche Strömung heißt *Potentialströmung* und wegen (A.5) folgt wieder $\Delta u = 0$, d.h. das Geschwindigkeitspotential genügt der Laplacegleichung.

Wir kommen nun noch einmal zur instationären Strömung und nehmen an, das strömende Medium hat außerdem eine gewisse Zähigkeit μ . In diesem Fall werden die Eulerschen Gleichungen durch die allgemeineren *Navier-Stokes-Gleichungen* ersetzt. Diese lauten für ein inkompressibles Medium

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \text{grad})v + \frac{1}{\varrho} \text{grad } p - \frac{\mu}{\varrho} \Delta v = k, \quad \text{div } v = 0.}$$

Auch auf diese Gleichungen können wir in dieser Einführung nicht weiter eingehen. Es sei lediglich angemerkt, dass bei den Navier-Stokes-Gleichungen immer noch einige grundlegende Fragen zur Existenz globaler Lösungen offen sind. Das Clay Mathematics Institute in Cambridge (Massachusetts) hat im Jahr 2000 das Problem der Existenz globaler Lösungen der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen als eines von sieben Millenium-Problemen benannt und für seine Lösung ein Preisgeld von einer Million Dollar ausgesetzt.

1.3.5. Balken- und Plattengleichung

Wir betrachten einen dünnen Balken oder Stab der Länge L , dessen Auslenkung aus seiner Ruhelage beschrieben wird durch eine Funktion $u(t, x)$. Der entscheidende Unterschied zur Saite ist, dass der Balken auch Widerstand gegen Verbiegung leistet, während wir bei der Saite nur Kräfte

durch elastisches Zusammenziehen berücksichtigt hatten. Die Funktion u genügt dann der partiellen Differentialgleichung

$$\boxed{u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0}, \quad (1.44)$$

die wir *Balkengleichung* nennen wollen. Bedenkt man, dass u_{xxxx} durch zweifache Anwendung des Laplaceoperators (A.6) erhalten werden kann, lässt sich diese Gleichung auch als $u_{tt} + c^2 \Delta^2 u = 0$ schreiben.

Die zweidimensionale Verallgemeinerung des Balkens ist die Platte. Im Gegensatz zur Membran leistet auch sie Widerstand gegen Verbiegung. Die *Plattengleichung* lautet

$$\boxed{u_{tt} + c^2 \Delta^2 u = 0}. \quad (1.45)$$

Man beachte, dass zweifache Anwendung des Laplaceoperators (A.7) gerade

$$\Delta^2 u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}$$

liefert.

Auch zu (1.44) und (1.45) gibt es zugehörige stationäre Gleichungen, die sich einheitlich als

$$\boxed{\Delta^2 u = 0} \quad (1.46)$$

schreiben lassen. Vierfach stetig differenzierbare Funktionen, die dieser Gleichung genügen, heißen *biharmonisch*.

1.4. Formulierungen in angepassten Koordinaten

1.4.1. Polarkoordinaten

Bisher haben wir alle partiellen Differentialgleichungen in kartesischen Koordinaten formuliert. Mitunter ist es aber zweckmäßiger, der Geometrie des Gebietes G angepasste Koordinaten zu verwenden. So ist für eine Kreisscheibe oder einen Kreisring um den Ursprung oft die Betrachtung von *Polarkoordinaten* sinnvoll. Diese beschreiben die Lage eines Punktes in der Ebene durch seinen Abstand r vom Ursprung und den Winkel φ zwischen der Verbindung von Punkt mit Ursprung und der reellen Achse, siehe Abbildung 1.9.

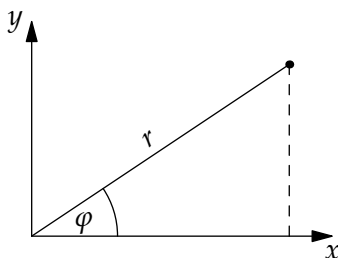


Abbildung 1.9: Polarkoordinaten r, φ in der Ebene

Aus der Skizze lesen wir die Beziehungen

$$\boxed{x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi} \quad (1.47)$$

ab, die zwei Funktionen $x = x(r, \varphi)$ und $y = y(r, \varphi)$ definieren.

Wir wollen nun als Beispiel zur Umrechnung auf Polarkoordinaten einen Ausdruck für den zweidimensionalen Laplaceoperator (A.7) finden. Sei also $u = u(x, y)$, dies liefert zugleich Formeln, die auch für $u = u(t, x, y)$ gültig sind. Wir bezeichnen zur Vereinfachung die durch

$$\tilde{u}(r, \varphi) := u(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$$

definierte Funktion wieder mit u . Damit rechnen wir

$$u_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi \quad (1.48)$$

$$u_\varphi = u_x x_\varphi + u_y y_\varphi = -u_x r \sin \varphi + u_y r \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} u_{rr} &= u_{xr} \cos \varphi + u_{yr} \sin \varphi = (u_{xx} x_r + u_{xy} y_r) \cos \varphi + (u_{yx} x_r + u_{yy} y_r) \sin \varphi \\ &= (u_{xx} \cos \varphi + u_{xy} \sin \varphi) \cos \varphi + (u_{yx} \cos \varphi + u_{yy} \sin \varphi) \sin \varphi \\ &= u_{xx} \cos^2 \varphi + 2u_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + u_{yy} \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} u_{\varphi\varphi} &= -u_{x\varphi} r \sin \varphi - u_{x\varphi} r \cos \varphi + u_{y\varphi} r \cos \varphi - u_{y\varphi} r \sin \varphi \\ &= -(u_{xx} x_\varphi + u_{xy} y_\varphi) r \sin \varphi - u_{x\varphi} r \cos \varphi + (u_{yx} x_\varphi + u_{yy} y_\varphi) r \cos \varphi - u_{y\varphi} r \sin \varphi \\ &= -(-u_{xx} r \sin \varphi + u_{xy} r \cos \varphi) r \sin \varphi - u_{x\varphi} r \cos \varphi + (-u_{yx} r \sin \varphi + u_{yy} r \cos \varphi) r \cos \varphi - u_{y\varphi} r \sin \varphi \\ &= u_{xx} r^2 \sin^2 \varphi - 2u_{xy} r^2 \sin \varphi \cos \varphi + u_{yy} r^2 \cos^2 \varphi - u_{x\varphi} r \cos \varphi - u_{y\varphi} r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Wir benutzen zunächst (1.48) und (1.50), um die Ableitungen u_x und u_y erster Ordnung zu eliminieren, die im Laplaceoperator nicht vorkommen:

$$ru_r + u_{\varphi\varphi} = u_{xx} r^2 \sin^2 \varphi - 2u_{xy} r^2 \sin \varphi \cos \varphi + u_{yy} r^2 \cos^2 \varphi.$$

Addiert man dazu die mit r^2 multiplizierte Gleichung (1.49), fällt auch die gemischte Ableitung u_{xy} heraus und wir erhalten dank trigonometrischem Pythagoras

$$r^2 u_{rr} + ru_r + u_{\varphi\varphi} = u_{xx} r^2 + u_{yy} r^2 = r^2 \Delta u.$$

Damit haben wir für den Laplaceoperator in Polarkoordinaten die Formel

$$\boxed{\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}} \quad (1.51)$$

erhalten.

Beispiel 1.9 Eine kreisförmige Membran mit Radius R wird durch die Auslenkung $u(t, r, \varphi)$ mit $0 \leq r \leq R$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ beschrieben. Sie genügt wegen (1.28) und (1.51) der partiellen Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \right). \quad (1.52)$$

Beispiel 1.10 Wir biegen den wärmeleitenden Stab aus Kapitel 1.3.1 zu einem Ring vom Radius R zusammen. Die Temperatur wird nun beschrieben durch eine Funktion $u = u(t, \varphi)$, da $r = R$ konstant ist. Vom Laplaceoperator (1.51) bleibt daher nur der letzte Summand übrig, d.h. die Wärmeleitungsgleichung (1.15) geht über in

$$u_t = \frac{a^2}{R^2} u_{\varphi\varphi}. \quad (1.53)$$

Da a^2/R^2 eine Konstante ist, ist dies bis auf die Bezeichnung der Variablen wieder die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung (1.11).

1.4.2. Zylinderkoordinaten

Ein Punkt im dreidimensionalen Raum kann beschrieben werden durch die Polarkoordinaten r, φ seiner orthogonalen Projektion in die $x - y$ -Ebene und durch die Höhe $z = h$ über dieser Ebene. Die Koordinaten r, φ, h genügen also

$$\boxed{x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h,} \quad (1.54)$$

siehe Abbildung 1.10.

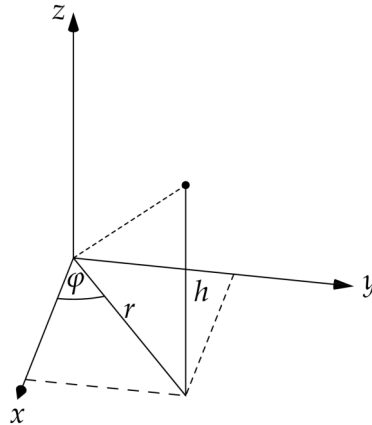


Abbildung 1.10: Zylinderkoordinaten r, φ, h im Raum

Für den Laplaceoperator (A.8) gilt wegen (1.51) die Darstellung

$$\boxed{\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u_{hh}.} \quad (1.55)$$

Beispiel 1.11 Wir betrachten die Wärmeleitung auf einem dünnwandigen Hohlzylinder vom Radius R . Die Temperatur ist also eine Funktion $u = u(t, \varphi, h)$. Da hier $r = R$ konstant ist, entfallen von (1.55) die ersten beiden Summanden und wir erhalten aus der Wärmeleitungsgleichung (1.15)

$$u_t = a^2 \left(\frac{1}{R^2} u_{\varphi\varphi} + u_{hh} \right).$$

Dies ist bis auf eine Skalierung die zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung aus Bemerkung 1.4. Führt man nämlich durch $\psi = \varphi R$ eine neue Variable ein, erhält man

$$u_\psi = u_\varphi \varphi_\psi = u_\varphi \frac{1}{R}, \quad u_{\psi\psi} = \frac{1}{R^2} u_{\varphi\varphi}$$

und damit

$$u_t = a^2 (u_{\psi\psi} + u_{hh}) = a^2 \Delta u,$$

wobei hier der zweidimensionale Laplaceoperator mit den Variablen ψ, h gebildet wird.

1.4.3. Kugelkoordinaten

Ein Punkt im dreidimensionalen Raum kann beschrieben werden durch *Kugelkoordinaten* r, φ, ϑ . Dabei ist r sein Abstand vom Ursprung, φ hat dieselbe Bedeutung wie bei Zylinderkoordinaten und ϑ ist der Winkel zwischen der z -Achse und der Verbindung des Punktes mit dem Ursprung², siehe Abbildung 1.11. Für Kugelkoordinaten r, φ, ϑ gelten die Umrechnungsformeln

$$\boxed{x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta,} \quad (1.56)$$

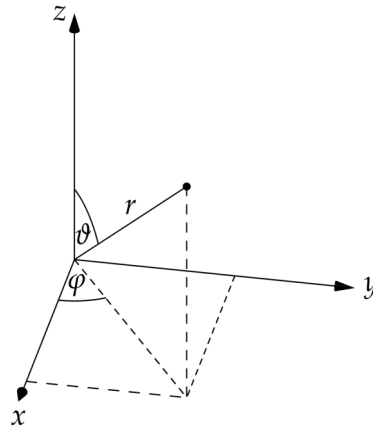


Abbildung 1.11: Kugelkoordinaten r, φ, ϑ im Raum

Für den Laplaceoperator (A.8) gilt die Darstellung

$$\boxed{\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta u_\vartheta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} u_{\varphi\varphi}} \quad (1.57)$$

$$= u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\vartheta\vartheta} + \frac{\cot \vartheta}{r} u_\vartheta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} u_{\varphi\varphi}. \quad (1.58)$$

Wir verzichten auf eine Herleitung.

Beispiel 1.12 Wir zeigen, dass

$$u(r, \varphi, \vartheta) = \frac{1}{r}$$

für $r \neq 0$ die dreidimensionale Laplacegleichung $\Delta u = 0$ erfüllt. Da u nur von r abhängt, bleibt von (1.57) nur der erste Summand übrig und wir finden

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-1) = 0.$$

1.5. Nebenbedingungen

1.5.1. Korrekt gestellte Probleme

Es wurde schon an verschiedenen Stellen darauf hingewiesen, dass die Lösung einer partiellen Differentialgleichung in der Regel nicht eindeutig ist. Sie kann sehr viele Freiheitsgrade enthalten,

²Mitunter wird für ϑ auch der Winkel zwischen dieser Strecke und der $x - y$ -Ebene genommen. Man beachte, dass diese Art von Kugelkoordinaten auf etwas andere Formeln führt.

sogar willkürliche Funktionen (während ja die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung meist noch willkürliche Konstanten enthält.)

Beispiel 1.13 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u_{xy} = 0,$$

für eine Funktion $u(x, y)$, die uns schon in Beispiel 1.8 begegnet war. Schreibt man sie als

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_x) = 0$$

folgt dass $u_x(x, y) = \varphi(x)$ mit einer beliebigen differenzierbaren Funktion φ . Integration liefert nun

$$u(x, y) = \int \varphi(x) dx = \Phi(x) + \psi(y),$$

wobei Φ eine Stammfunktion von φ sein soll und die Integrationskonstante ψ eine beliebige differenzierbare Funktion von y sein kann.

Um ein Problem mit einer eindeutigen Lösung zu formulieren, ist es daher meist notwendig, noch gewisse Nebenbedingungen an die Lösung der Differentialgleichung zu stellen. Das Ziel ist es, ein Problem mit folgenden drei Eigenschaften zu erhalten.

1. Die Lösung existiert.
2. Die Lösung ist eindeutig.
3. Die Lösung hängt stetig von den gegebenen Daten ab.

Probleme mit diesen drei Eigenschaften nennt man *korrekt gestellt*. Dabei sind die Daten eines Problems alle in die partielle Differentialgleichung und die Nebenbedingungen eingehenden Zahlen, Koeffizienten und Funktionen. Unter einer stetigen Abhängigkeit von den Daten sollte man sich vorstellen, dass sich die (wegen den ersten beiden Bedingungen eindeutig existierende) Lösung nur wenig ändert, wenn man die Daten stört. Ein solches Verhalten eines Problems ist auch für die approximative numerische Lösung erforderlich, da hier Eingangsdaten gewöhnlich fehlerbehaftet sind. Nur bei korrekt gestellten Problemen kann man erwarten, dass die berechnete Näherungslösung tatsächlich eine Näherung der wirklichen Lösung ist.

Um den Begriff der stetigen Abhängigkeit von den Daten exakt zu formulieren wäre es erforderlich, den Abstand zwischen zwei Lösungen quantifizieren zu können, und ebenso auch den Abstand zwischen verschiedenen gegebenen Daten. Das kann durch Normen in gewissen Funktionenräumen geschehen. Besonders gut geeignet für die Lösungen partieller Differentialgleichungen sind dabei die sogenannten *Sobolewräume*, in denen Differenzierbarkeit von Funktionen auch in einem erweiterten Sinn verstanden wird. Die Einführung solcher Räume wie auch der Nachweis der drei Lösbarkeitseigenschaften von oben bei gewissen partiellen Differentialgleichungen gehen über das Niveau dieser Vorlesung beträchtlich hinaus. Wir können deshalb nur intuitiv über die Anzahl und Art der Nebenbedingungen befinden (was aber auch sehr nützlich ist!). Die erforderlichen Nebenbedingungen sind meist physikalisch gut motiviert und werden später eine Bestätigung finden, wenn wir zu gewissen partiellen Differentialgleichungen inklusiv Nebenbedingungen eindeutig bestimmte Lösungen berechnen können.

Die folgenden Abschnitte sind den verschiedenen dabei auftretenden Zusatzbedingungen gewidmet. Die wichtigsten davon sind *Anfangsbedingungen* (siehe Abschnitt 1.5.2) und *Randbedingungen*

(siehe Abschnitt 1.5.3). Wird eine partielle Differentialgleichung durch Hinzunahme von Anfangsbedingungen zum korrekt gestellten Problem, spricht man von einem *Anfangswertproblem*. Hierzu gehören viele parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen im Ganzraum $\mathbb{R}^n$. Genügt die Hinzunahme von Randbedingungen, um aus der partiellen Differentialgleichung ein korrekt gestelltes Problem zu machen, handelt es sich um eine *Randwertaufgabe*. Dafür sind elliptische Differentialgleichungen typisch. Braucht man sogar beides, also Anfangs- und Randbedingungen, um ein korrekt gestelltes Problem zu formulieren, spricht man von einem *Anfangs-Randwertproblem*. Dies ist häufig bei parabolischen und hyperbolischen Differentialgleichungen in Gebieten $G \subsetneq \mathbb{R}^n$ der Fall.

1.5.2. Anfangsbedingungen

Anfangsbedingungen beschreiben den Zustand des zu modellierenden Systems zu einem Anfangszeitpunkt, der standardmäßig meist auf $t = 0$ festgelegt wird. Anfangsbedingungen kommen daher nur bei instationären Problemen vor, aber nicht bei stationären. Als Faustregel kann man sich merken, dass so viele Anfangsbedingungen gestellt werden können, wie die höchste Ordnung einer vorkommenden Zeitableitung ist.

Beispiel 1.14 In der Wärmeleitungsgleichung in einem Stab (siehe (1.11) bzw. (1.13)) kommt eine Zeitableitung vor, daher stellen wir für $u(t, x)$ eine Anfangsbedingung:

$$u(0, x) = f(x), \quad (0 \leq x \leq L). \quad (1.59)$$

Dabei ist f eine auf $[0, L]$ gegebene Funktion, die die Temperaturverteilung zu Prozeßbeginn beschreibt.

Beispiel 1.15 In der Wärmeleitungsgleichung in einem dreidimensionalen Körper K (siehe (1.15) bzw. (1.17)) kommt eine Zeitableitung vor, daher stellen wir für $u(t, x, y, z)$ eine Anfangsbedingung:

$$u(0, x, y, z) = f(x, y, z), \quad ((x, y, z) \in K).$$

Dabei ist f eine auf K gegebene Funktion, die die Temperaturverteilung zu Prozeßbeginn beschreibt.

Beispiel 1.16 In der gedämpften Saitenschwingungsgleichung (1.26) kommt eine Zeitableitung zweiter Ordnung vor, daher können wir zwei Anfangsbedingungen für $u(t, x)$ vorschreiben:

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x), \quad (0 \leq x \leq L).$$

Dabei sind f und g auf $[0, L]$ gegebene Funktionen, die die Auslenkung bzw. die Geschwindigkeit der Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ angeben. Dies gilt natürlich genauso für die ungedämpfte Saitenschwingungsgleichung (1.22)

Beispiel 1.17 In der dreidimensionalen Wellengleichung (1.30) im Raum $\mathbb{R}^3$ kommt eine Zeitableitung zweiter Ordnung vor, daher können wir zwei Anfangsbedingungen für $u(t, x, y, z)$ vorschreiben:

$$u(0, x, y, z) = f(x, y, z), \quad u_t(0, x, y, z) = g(x, y, z), \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Dabei sind f und g auf $\mathbb{R}^3$ gegebene Funktionen, die die Amplitudenauslenkung bzw. -geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ angeben. Mit diesen beiden Bedingungen entsteht im Ganzraum $\mathbb{R}^3$ bereits ein Anfangswertproblem.

1.5.3. Randbedingungen

Von einer Lösung $u(x_1, \dots, x_n)$ einer stationären partiellen Differentialgleichung bzw. einer Lösung $u(t, x_1, \dots, x_n)$ einer instationären Differentialgleichung, die für $(x_1, \dots, x_n) \in G \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist, wird gewöhnlich verlangt, dass sie sich noch auf Punkte auf dem Rand ∂G ihres Definitionsgebietes fortsetzen läßt. In solchen Randpunkten gestellte Bedingungen nennen man *Randbedingungen*. Als Faustregel gilt, dass man bei einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung in jedem Randpunkt eine Bedingung stellen kann, bei einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung jedoch zwei. Wir unterscheiden nun drei Arten von Randbedingungen.

Randbedingungen erster Art werden auch *Dirichletsche Randbedingungen* genannt. Dabei wird in jedem Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in \partial G$ der Funktionswert von u vorgeschrieben.

Beispiel 1.18 Bei der Wärmeleitungsgleichung im Stab (siehe (1.11) bzw. (1.13)) ist G das Intervall $[0, L]$, das zwei Randpunkte hat, $\partial G = \{0, L\}$. In jedem Randpunkt kann zu jedem Zeitpunkt die Temperatur vorgeschrieben werden:

$$u(t, 0) = \varphi(t), \quad u(t, L) = \psi(t)$$

dabei sind φ und ψ gegebene Funktionen. Zusammen mit den in (1.59) formulierten Anfangsbedingungen ergibt sich ein Anfangs-Randwertproblem.

Beispiel 1.19 Die Gleichung der kreisförmigen Membran mit Radius R hatten wir in Beispiel 1.9 in Polarkoordinaten angeben. Dirichletsche Randbedingungen für die Funktion $u(t, r, \varphi)$ lassen sich schreiben als

$$u(t, R, \varphi) = f(t, \varphi).$$

Dabei ist f gegeben und kennzeichnet die Auslenkung der Membran am Rand. Ist die Membran dort eingespannt und bewegt sich nicht, ist $f \equiv 0$ zu setzen. Um ein vollständiges Anfangs-Randwertproblem zu erhalten, müssen nun noch Anfangsbedingungen der Form

$$u(0, r, \varphi) = g(r, \varphi), \quad u_t(0, r, \varphi) = h(r, \varphi) \quad (1.60)$$

hinzugenommen werden.

Randbedingungen zweiter Art werden auch *Neumannsche Randbedingungen* genannt. Dabei wird in jedem Punkt von ∂G der Wert der Ableitung

$$\frac{\partial u}{\partial n}, \quad x \in \partial G$$

nach der äußeren Normalen an das Gebiet G vorgeschrieben. Wir erinnern in diesem Zusammenhang daran, dass die äußere Normalenableitung auch als Skalarprodukt von n mit dem Gradienten $\text{grad } u$ erhalten werden kann (siehe dazu (A.2)).

Im Kontext von Wärmeleitungsproblemen bedeutet die (mit $-k$ multiplizierte) äußere Normalenableitung den Wärmefluss durch die Oberfläche von G , weil der Wärmefluß gemäß des Fourschen Gesetzes durch (1.14) gegeben ist. Speziell bedeutet

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial G,$$

dass kein Wärmefluß nach außen möglich ist, d.h. der Körper ist vollständig isoliert.

Beispiel 1.20 Randbedingungen für die Wärmeleitungsgleichung im Stab (siehe (1.11) bzw. (1.13)) der an den Enden isoliert ist, lauten demnach

$$u_x(t, 0) = 0, \quad u_x(t, L) = 0.$$

Beispiel 1.21 Für die ebene Wärmeleitung im Dreieck G mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(a, 0)$ und $(0, b)$ sei der Wärmefluß über den Rand des Dreiecks vorgegeben. Wir finden wegen der in Abbildung 1.12 eingezeichneten äußeren Normalen

$$\begin{aligned} ku_y(t, x, 0) &= f(t, x), & (0 \leq x \leq a), \\ ku_x(t, 0, y) &= g(t, y), & (0 \leq y \leq b), \\ -kbu_x(t, x, y) - kau_y(t, x, y) &= h(t, x), & (x/a + y/b = 1). \end{aligned}$$

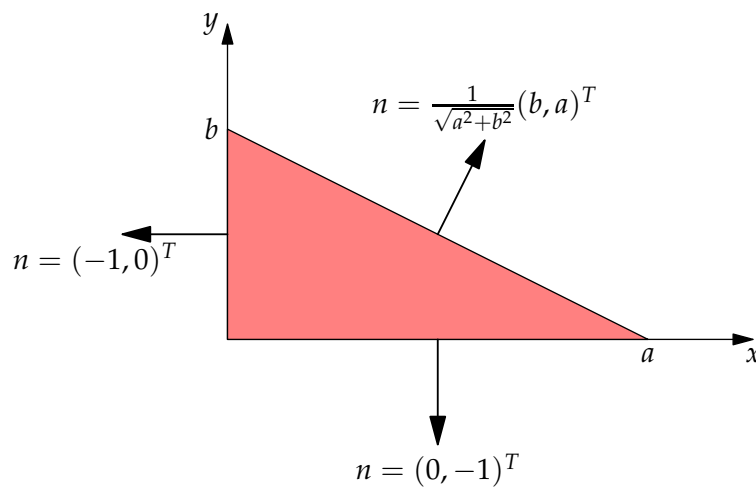


Abbildung 1.12: Ebenes Wärmeleitproblem im Dreieck

Beispiel 1.22 Die Randbedingungen

$$u_x(t, 0) = 0, \quad u_x(t, L) = 0$$

lassen sich auch für die Saitenschwingungsgleichung (1.23) formulieren. Gemäß unseren Überlegungen in Kapitel 1.3.2 ist die vertikale Kraft auf die Saite am Ort x zur Zeit t gerade $Pu_x(t, x)$. Die homogenen Neumannschen Randbedingungen bedeuten also, dass keine Kräfte auf die Enden der Saite wirken, sie können frei schwingen, siehe Abbildung 1.13.

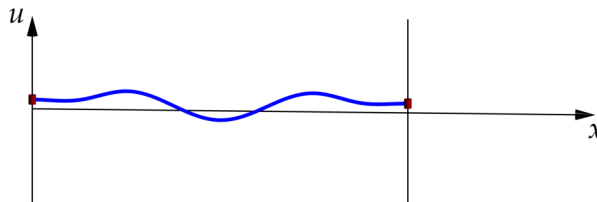


Abbildung 1.13: Frei schwingende Enden der Saite

Beispiel 1.23 In analoger Weise kann man auch eine frei schwingende Membran beschreiben. Die Randbedingungen für (1.52) lauten dann

$$u_r(t, R, \varphi) = 0.$$

Die allgemeinere Randbedingung

$$u_r(t, R, \varphi) = f(t, \varphi)$$

entspricht der Vorgabe einer Kraftwirkung auf den Rand der Membran.

Beispiel 1.24 Bei der Balkengleichung (1.44) als einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung können wir sogar zwei Randbedingungen vorschreiben. Randbedingungen erster und zweiter Art beschreiben dabei einen fest eingespannten Balken:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= 0, & u(t, L) &= 0 \\ u_x(t, 0) &= 0, & u_x(t, L) &= 0. \end{aligned}$$

Allgemeiner kann man in diesen Bedingungen natürlich auf der rechten Seite vier Funktionen von t vorschreiben. Bei einem frei beweglichen Ende kann man dagegen die Bedingungen

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, 0) &= 0, & u_{xx}(t, L) &= 0 \\ u_{xxx}(t, 0) &= 0, & u_{xxx}(t, L) &= 0, \end{aligned}$$

vorschreiben, die nicht von den Standardtypen von Randbedingungen sind.

Beispiel 1.25 Wir betrachten eine kreisförmige Platte, die der Gleichung (1.45) genügt. Da die Gleichung vierter Ordnung ist, können wir für $u(t, r, \varphi)$ Randbedingungen erster und zweiter Art vorschreiben. Durch

$$u(t, R, \varphi) = 0, \quad u_r(t, R, \varphi) = 0$$

wird die fest eingespannte Platte beschrieben. Zusammen mit zwei Anfangsbedingungen

$$u(0, r, \varphi) = f(r, \varphi), \quad u_t(0, r, \varphi) = g(r, \varphi)$$

entsteht ein korrekt gestelltes Problem.

Für eine beweglich gelagerte Platte wird dagegen neben der Dirichletschen Randbedingung $u(t, R, \varphi) = 0$ noch die Bedingung

$$\Delta u(t, R, \varphi) = 0$$

gefordert.

Randbedingungen dritter Art werden auch *Robinsche Randbedingungen* genannt. Sie sind von der Form

$$au + b \frac{\partial u}{\partial n} = c, \quad x \in \partial G$$

mit gegebenen Funktion a, b, c . Sie stellen also eine Kombination der Randbedingungen erster und zweiter Art dar.

Beispiel 1.26 Wir betrachten einen Körper K , in dessen Umgebung eine Temperatur u_0 herrsche (u_0 darf zeitlich und räumlich veränderlich sein). Zu lösen ist also die dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung (1.15). Der Wärmefluss durch die Oberfläche wird (bis auf den Faktor $-k$) durch die Normalenableitung von u gegeben (folgt aus dem Fourierschen Gesetz 1.14). Kann der Körper mit der Umgebung Wärme austauschen, so gilt entsprechend dem *Newtonschen Abkühlungsgesetz*

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} = H(u - u_0)$$

wobei H der Wärmeübergangskoeffizient ist. Damit gilt die Randbedingung dritter Art

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0) = 0,$$

wobei $h = H/k$ gesetzt wurde.

Für $h \rightarrow 0$ erhält man daraus wieder die Randbedingung des isolierten Körpers, für $k \rightarrow \infty$ entstehen Randbedingungen erster Art mit Randwerten u_0 .

Beispiel 1.27 Wir betrachten den wärmeleitenden Stab, der durch Gleichung (1.11) mit $u = u(t, x)$ beschrieben wird. Kann der wärmeleitende Stab mit seiner Umgebung Wärme austauschen, so gilt entsprechend Beispiel 1.26

$$-u_x(t, 0) + h(u(t, 0) - u_1(t)) = 0, \quad u_x(t, L) + h(u(t, L) - u_2(t)) = 0$$

dabei sind $u_1(t)$ und $u_2(t)$ gegebene Funktionen, die die Außentemperatur in der Nähe des linken bzw. rechten Stabendes beschreiben.

Beispiel 1.28 Auch für die Saitenschwingungsgleichung (1.22) lassen sich Randbedingungen dritter Art formulieren. Betrachten wir eine Saite mit beweglichen Enden, die durch Federn in die Ruhelage zurückgezogen werden, siehe Abbildung 1.14.

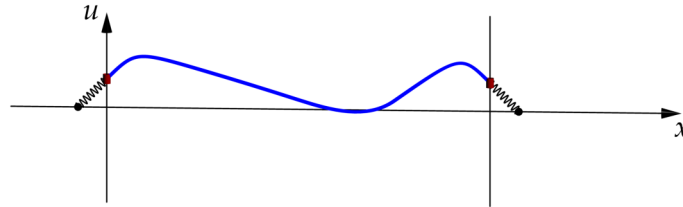


Abbildung 1.14: Schwingende Saite mit elastisch befestigten Enden

Die Kraft $Pu_x(t, a)$ (mit $a = 0$ oder $a = L$) auf ein Saitenende kann hier gleich Federkonstante k mal Auslenkung $u(t, a)$ gesetzt werden, also erhalten wir

$$Pu_x(t, 0) = ku(t, 0), \quad -Pu_x(t, L) = ku(t, L)$$

und mit $h := k/P$ die homogenen Randbedingungen dritter Art

$$u_x(t, 0) - hu(t, 0) = 0, \quad u_x(t, L) + hu(t, L) = 0.$$

Inhomogene Randbedingungen dritter Art der Form

$$u_x(t, 0) - h(u(t, 0) - u_1(t)) = 0, \quad u_x(t, L) + h(u(t, L) - u_2(t)) = 0$$

kommen zustande, wenn die eingespannten Enden der Federn sich an vertikal beweglichen Orten $u_1(t)$ bzw. $u_2(t)$ befinden.

1.5.4. Verträglichkeitsbedingungen

Betrachtet werde ein Anfangs-Randwertproblem für eine Funktion $u = u(t, x)$ mit $t \in I := [0, T)$ (ein Zeitintervall, $T = \infty$ ist möglich) und $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ (ein Gebiet). Die Anfangswerte werden für $(t, x) \in \{0\} \times G$ vorgegeben, geometrisch gesprochen auf der Grundfläche des Zylinders $I \times G$, siehe Abbildung 1.15. Die Randwerte werden für $(t, x) \in I \times \partial G$ vorgegeben, geometrisch

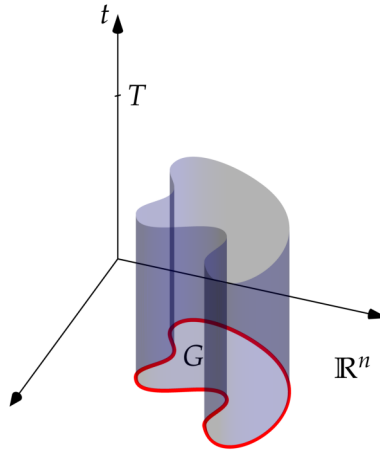


Abbildung 1.15: Zeit-Raum-Zylinder $I \times G$

gesprochen also auf der Mantelfläche des Zylinders $I \times G$. Beiden Flächen gemeinsam ist die Menge $\{0\} \times \partial G$, die in der Abbildung rot hervorgehoben ist. Damit ein widerspruchsfreies Problem entsteht, müssen auf dieser Menge die Anfangs- und Randwerte übereinstimmen.

Wir können die Anfangs- und Randwerte also nicht vollkommen willkürlich vorgeben, sondern müssen gewisse gegenseitige Abhängigkeiten beachten.

Beispiel 1.29 Wir betrachten die Wärmeleitung im Stab, zur Wärmeleitungsgleichung $u_t = c^2 u_{xx}$ können nach den Beispielen 1.14 und 1.18 die Bedingungen

$$u(0, x) = f(x), \quad u(t, 0) = \varphi(t), \quad u(t, L) = \psi(t)$$

hinzugenommen werden. Die Funktionen f, φ, ψ können nun nicht unabhängig voneinander willkürlich vorgegeben werden, sondern die Anfangswerte am Rand des Stabes müssen mit den Randwerten der Anfangsfunktion übereinstimmen:

$$\varphi(0) = f(0), \quad \psi(0) = f(L).$$

Beispiel 1.30 In Beispiel 1.19 hatten wir ein korrekt gestelltes Anfangs-Randwertproblem für die schwingende Membran formuliert. Die dort vorzugebenden Funktionen f, g und h können allerdings nicht ganz unabhängig voneinander gewählt werden, wir müssen folgende Verträglichkeitsbedingungen beachten:

$$f(0, \varphi) = g(R, \varphi), \quad f_t(0, \varphi) = h(R, \varphi).$$

Eine andere Art von Verträglichkeitsbedingungen kann erforderlich sein, wenn der Rand des Gebietes G aus mehreren Teilen besteht, auf denen jeweils Randbedingungen vorgegeben werden. Hier müssen wir darauf achten, dass diese Bedingungen an den gemeinsamen Punkten der verschiedenen Randstücke zusammenfallen.

Beispiel 1.31 Wir betrachten die Laplacegleichungen $\Delta u = 0$ auf dem Rechteck $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < b\}$. Um eine Dirichletsche Randbedingung zu formulieren, können wir auf jeder Quadratseite die Funktionswerte von u vorschreiben:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x), & u(x, b) &= f_2(x), & 0 &\leq x \leq a, \\ u(0, y) &= g_1(y), & u(a, y) &= g_2(y), & 0 &\leq y \leq b. \end{aligned}$$

Dabei sind f_1, f_2 auf $[0, a]$ und g_1, g_2 auf $[0, b]$ vorgegebene Funktionen. Damit auch in den vier Eckpunkten des Rechtecks jeweils nur eine Bedingung gestellt wird und kein Widerspruch entsteht, müssen diese vier Funktionen die Verträglichkeitsbedingungen

$$f_1(0) = g_1(0), \quad g_1(b) = f_2(0), \quad f_2(a) = g_2(b), \quad f_1(a) = g_2(0)$$

erfüllen, siehe Abbildung 1.16.

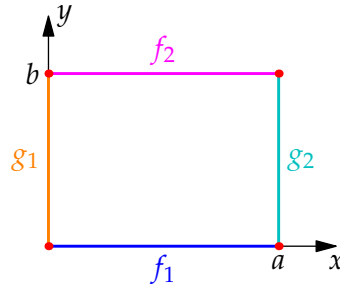


Abbildung 1.16: Dirichletsche Randbedingungen auf dem Rand des Rechtecks $(0, a) \times (0, b)$

1.5.5. Weitere Nebenbedingungen

Beim Wechsel auf angepasste Koordinaten treten mitunter *Periodizitätsbedingungen* auf.

Beispiel 1.32 In Beispiel 1.10 wurde die Wärmeleitungsgleichung im Kreisring hergeleitet. Der Ring hat zwar keinen Rand, so dass keine Randbedingungen gestellt werden können, trotzdem brauchen wir Nebenbedingungen, die hier in Form von Periodizitätsbedingungen

$$u(t, 0) = u(t, 2\pi), \quad u_\varphi(t, 0) = u_\varphi(t, 2\pi)$$

gestellt werden (wir nehmen an, dass $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ betrachtet wird; entsprechend gilt für $-\pi \leq \varphi \leq \pi$). Zusammen mit einer Anfangsbedingung

$$u(0, \varphi) = f(\varphi)$$

entsteht ein korrekt gestelltes Problem.

Eine weitere Art von Nebenbedingungen, die manchmal auftritt, sind *Beschränktheitsbedingungen*.

Beispiel 1.33 Wir betrachten die Laplacegleichung $\Delta u = 0$ im Kreis um den Ursprung mit Radius R . In Polarkoordinaten kann man diese partielle Differentialgleichung als

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$$

mit $u = u(r, \varphi)$ schreiben (vgl. (1.51)). Neben der Randbedingung

$$u(R, \varphi) = f(\varphi)$$

und den Periodizitätsbedingungen

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi), \quad u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, 2\pi)$$

brauchen wir hier auch noch eine Bedingung für $r = 0$, damit wir Lösungen ausschließen, die im Ursprung unbeschränkt sind:

$$|u(0, \varphi)| < \infty.$$

Ist das Gebiet G , in dem die partielle Differentialgleichung gestellt wird, unbeschränkt, aber nicht der Ganzraum $\mathbb{R}^n$, so kommen gewöhnlich noch gewisse Bedingungen für $|x| \rightarrow +\infty$ hinzu, die *Abklingbedingungen* heißen.

Beispiel 1.34 Wir betrachten die Laplacegleichung $\Delta u = 0$ im Äußeren des Kreises um den Ursprung mit Radius R . Für $u = u(r, \varphi)$ fordern wir neben der Randbedingung erster Art

$$u(R, \varphi) = f(\varphi)$$

und den Periodizitätsbedingungen

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi), \quad u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, 2\pi)$$

noch, dass $u(r, \varphi)$ für $r \rightarrow +\infty$ beschränkt bleibt.

Beispiel 1.35 Für das analoge dreidimensionale Problem im Äußeren einer Kugel ist für $u = u(r, \vartheta, \varphi)$ die Beschränktheit von ru für $r \rightarrow +\infty$ zu fordern, d.h. u klingt mindestens wie $1/r$ ab. Warum hier eine schärfere Bedingung als im Zweidimensionalen notwendig ist, kann ohne Rechnungen nicht verstanden werden.

2. Die Fouriersche Methode

2.1. Der Separationsansatz

Wir wollen nun eine wichtige Lösungsmethode kennenlernen, die auf Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) und sein berühmtes Buch „Théorie analytique de la chaleur“ von 1822 zurückgeht und deshalb *Fouriersche Methode* oder *Separationsverfahren* genannt wird. Wir suchen dabei zunächst Lösungen einer speziellen Gestalt, die sich als Produkt von Funktionen von jeweils nur einem Teil der Variablen $x_1, \dots, x_n$ darstellen lassen. So wird man beispielsweise $u(x, y) = X(x)Y(y)$ ansetzen, mit zu bestimmenden Funktionen X und Y . Es zeigt sich, dass man für die Ansatzfunktionen gewöhnliche Differentialgleichungen oder partielle Differentialgleichungen mit weniger Variablen erhält.

Beispiel 2.1 Wir untersuchen die Anfangs-Randwert-Aufgabe für die am Rand fest eingespannte schwingende Saite der Länge L :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (0 < x < L, t > 0) \quad (2.1)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad (2.2)$$

$$u(0, x) = f(x) = a(L/2 - |x - L/2|), \quad u_t(0, x) = 0, \quad (2.3)$$

Dabei ist (2.1) die aus (1.22) bekannte partielle Differentialgleichung der schwingenden Saite, (2.2) sind Randbedingungen erster Art und (2.3) sind zwei Anfangsbedingungen, die eine Auslenkung der Saite durch Ziehen am Mittelpunkt und Loslassen zur Zeit $t = 0$ beschreiben, siehe Abbildung 2.1

Der Separationsansatz hat hierbei die Gestalt

$$u(t, x) = T(t)X(x) \quad (2.4)$$

mit zu bestimmenden Funktionen T und X . Einsetzen in die partielle Differentialgleichung (2.1) liefert

$$T''(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x)$$

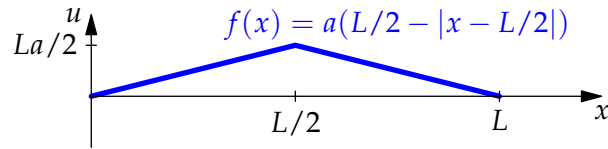


Abbildung 2.1: Anfangsauslenkung der schwingenden Saite

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Da die linke Seite der letzten Gleichung nur von t , die rechte nur von x abhängt, beide aber für alle $t > 0$ und $x \in (0, L)$ übereinstimmen sollen, bleibt nur, dass beide Seiten jeweils konstant sind. Wir nennen diese Konstante $-\lambda$ und erhalten aus

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (2.5)$$

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0. \quad (2.6)$$

Die Randbedingung (2.2) ergibt $T(t)X(0) = 0 = T(t)X(L)$. $T(t) = 0$ würde auf die uninteressante Lösung $u(t, x) = 0$ führen, deshalb sind nur die Bedingungen

$$X(0) = X(L) = 0 \quad (2.7)$$

von Bedeutung. Sie stellen Randbedingungen für die gewöhnliche Differentialgleichung (2.5) dar, die zudem eine unbekannte Zahl λ enthält. Die Anfangsbedingung (2.3) wird später eingebracht.

Im Beispielsind wir also auf ein Randwertproblem für eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung geführt worden. Deshalb beschäftigen wir uns zunächst mit diesem Typ von Randwertaufgaben allgemeiner.

2.2. Sturm-Liouville-Theorie

Unter einer *Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe* auf einem Intervall $[a, b]$ verstehen wir ein Randwertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) + \lambda x(t) = 0, \quad (2.8)$$

$$\alpha x(a) + \beta x'(a) = 0, \quad (2.9)$$

$$\gamma x(b) + \delta x'(b) = 0, \quad (2.10)$$

hat, wobei folgende Voraussetzungen im Folgenden stets als erfüllt angenommen werden:

- $p(t)$ ist auf $[a, b]$ stetig differenzierbar und positiv,
- $q(t)$ ist auf $[a, b]$ stetig,
- $\alpha^2 + \beta^2 > 0, \gamma^2 + \delta^2 > 0$.

Führt man durch

$$\boxed{L(x) = (px')' + qx} \quad (2.11)$$

den sogenannten *Sturm-Liouville-Operator* ein, lässt sich die Differentialgleichung (2.8) in der Kurzform

$$\boxed{Lx = -\lambda x} \quad (2.12)$$

schreiben.

Eine Zahl λ heißt *Eigenwert* der Sturm-Liouville-Aufgabe, wenn (2.8), (2.9), (2.10) eine nichttriviale Lösung $x(t)$ hat, d.h. $x(t) \not\equiv 0$. Jede solche Lösung heißt *Eigenfunktion* zum Eigenwert λ . Die Menge der Eigenfunktionen bildet zusammen mit der Nullfunktion einen Vektorraum, den *Eigenraum* zum Eigenwert λ .

Beispiel 2.2 Für $a = 0$, $b = L$, $p(t) = 1$, $q(t) = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, entsteht das in Beispiel 2.1 erhaltene Randwertproblem (2.5), (2.7).

Um die Eigenwerte zu ermitteln, bestimmen wir zunächst die allgemeine Lösung der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung $X'' + \lambda X = 0$ durch den Exponentialansatz

$$X(x) = e^{\mu x}.$$

Dabei genügt μ der charakteristischen Gleichung

$$\mu^2 + \lambda = 0.$$

Wir unterscheiden – abhängig vom Vorzeichen des unbekannten λ – drei Fälle:

- Falls $\lambda < 0$, so hat die charakteristische Gleichung die beiden Lösungen $\mu_1 = \sqrt{-\lambda}$, $\mu_2 = -\sqrt{-\lambda}$. Ein Fundamentalsystem besteht daher aus den Funktionen

$$e^{\sqrt{-\lambda}x}, \quad e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

und die allgemeine Lösung hat die Form

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Wir müssen versuchen, C_1 und C_2 so anzupassen, dass die Randbedingungen (2.7) erfüllt sind. Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} 0 &= X(0) = C_1 + C_2 \\ 0 &= X(L) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}L} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}L} \end{aligned}$$

Es folgt $C_1 = -C_2$ und damit

$$0 = C_1 \left(e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L} \right)$$

Der Ausdruck in Klammern ist hier positiv, deshalb folgt $C_1 = 0$ und damit auch $C_2 = 0$. Das Randwertproblem hat nur die triviale Lösung $X(x) = 0$, also ist $\lambda < 0$ kein Eigenwert.

- Falls $\lambda = 0$, so ist $\mu = 0$ die einzige Lösung der charakteristischen Gleichung, ihre Vielfachheit ist 2. Daher ist

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Die Randbedingungen ergeben

$$0 = X(0) = C_1, \quad 0 = X(L) = C_1 + C_2 L$$

und daher $C_1 = C_2 = 0$. Da das Randwertproblem nur die triviale Lösung hat, ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert.

- Falls $\lambda > 0$, so hat die charakteristische Gleichung die beiden komplexen Lösungen $\mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$, so dass

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

hier die allgemeine Lösung ist. Einsetzen der Randbedingungen ergibt

$$0 = X(0) = C_1, \quad 0 = X(L) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}L) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}L).$$

Wegen $C_1 = 0$ bleibt von der zweiten Bedingung nur

$$C_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

übrig. $C_2 = 0$ würde hier nur die triviale Lösung $X(x) \equiv 0$ liefern, deshalb kann es nur eine nichttriviale Lösung geben, wenn

$$\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\lambda}L = n\pi.$$

Damit sind

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.13)$$

die Eigenwerte und

$$x_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.14)$$

zugehörige Eigenfunktionen. Der Eigenraum zum Eigenwert λ_n besteht aus allen Vielfachen der Funktion $x_n(x)$.

Der Raum $L^2(a, b)$ der *quadratintegriblen Funktionen* auf dem Intervall $[a, b]$ besteht aus denjenigen dort definierten Funktionen $x(t)$, für die das Integral

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty$$

im Lebesgueschem Sinne existiert. Für zwei Funktionen $x_1(t), x_2(t) \in L^2(a, b)$ kann durch

$$(x_1, x_2) = \int_a^b x_1(t)x_2(t) dt \quad (2.15)$$

ihr *Skalarprodukt* definiert werden. Die Existenz dieses Integrals ergibt sich sofort durch Integration der Ungleichung

$$|x_1 x_2| \leq \frac{1}{2} (|x_1|^2 + |x_2|^2),$$

welche wiederum nach kurzer Rechnung aus $(|x_1| - |x_2|)^2 \geq 0$ folgt.

Ist $(x_1, x_2) = 0$, so nennt man $x_1(t)$ und $x_2(t)$ *orthogonal*.

Lemma 2.1. Sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Eigenfunktionen der Sturm-Liouville-Aufgabe (2.8)–(2.10) (zu gewissen Eigenwerten), so gilt

$$(x_1, Lx_2) = (Lx_1, x_2). \quad (2.16)$$

Beweis. Sei

$$W := \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = x_1 x_2' - x_1' x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{vmatrix}$$

die Wronskideterminante der Lösungen. Aus der Randbedingung (2.9) für x_1 und x_2 folgt

$$\begin{pmatrix} x_1(a) & x_1'(a) \\ x_2(a) & x_2'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weil $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ist die Koeffizientenmatrix dieses Systems singulär und somit ihre Determinante $W(a) = 0$. Analog gilt $W(b) = 0$ und wir finden weiter

$$\begin{aligned} (pW)' &= (p(x_1 x_2' - x_1' x_2))' = (p x_2')' x_1 + p x_2' x_1' - (p x_1')' x_2 - p x_1' x_2' \\ &= (p x_2')' x_1 - (p x_1')' x_2 = x_1 ((p x_2')' + q x_2) - x_2 ((p x_1')' + q x_1) = x_1 L x_2 - x_2 L x_1, \end{aligned}$$

bekannt als *Lagrangesche Identität*. Damit ist

$$\int_a^b x_1(t)(L x_2)(t) - x_2(t)(L x_1)(t) dt = \int_a^b (p(t)W(t))' dt = p(b)W(b) - p(a)W(a) = 0$$

und es folgt

$$\int_a^b x_1(t)(L x_2)(t) dt = \int_a^b x_2(t)(L x_1)(t) dt$$

und damit die Behauptung. □

Nach dieser Vorbereitung können wir zeigen:

Satz 2.2. *Alle Eigenwerte der Sturm-Liouville-Aufgabe sind reell und einfach (d.h. alle Eigenräume sind eindimensional). Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*

Beweis. Seien $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Eigenfunktionen zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 . Entsprechend (2.12) gilt also

$$L x_1 = -\lambda_1 x_1, \quad L x_2 = -\lambda_2 x_2.$$

Setzt man dies in die Identität (2.16) aus Lemma 2.1 ein, folgt

$$(x_1, -\lambda_2 x_2) = (-\lambda_1 x_1, x_2)$$

und daraus

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0. \tag{2.17}$$

Sind also λ_1 und λ_2 voneinander verschieden, ergibt sich $(x_1, x_2) = 0$, d.h. beide Funktionen sind orthogonal.

Ist $x(t)$ Eigenfunktion zum Eigenwert λ , so ist $\overline{x(t)}$ Eigenfunktion zum Eigenwert $\bar{\lambda}$. (2.17) ergibt

$$(\lambda - \bar{\lambda})(x, \bar{x}) = 0.$$

Da aber

$$(x, \bar{x}) = \int_a^b x(t) \overline{x(t)} dt = \int_a^b |x(t)|^2 dt > 0$$

wegen $x(t) \not\equiv 0$ folgern wir $2i \operatorname{Im} \lambda = \lambda - \bar{\lambda} = 0$, λ muß also reell sein.

Seien $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zwei Eigenfunktionen zum selben Eigenwert λ . Dann erfüllen beide Funktionen dieselbe Differentialgleichung (2.8). Wie im Beweis von Lemma 2.1 ist $W(a) = 0$. Nach den bekannten Eigenschaften der Wronskideterminante ist damit $W(t) \equiv 0$ und $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sind linear abhängig. Also ist der Eigenraum zum Eigenwert λ eindimensional. $\square$

Beispiel 2.3 Tatsächlich besteht der Eigenraum zum reellen Eigenwert λ_n im Beispiel 2.2 aus den Vielfachen einer Funktion $x_n(x)$, ist also eindimensional. Die Orthogonalität bedeutet hier, dass für $n \neq m$

$$\begin{aligned} (x_n, x_m) &= \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\cos\left(\frac{n\pi}{L}x - \frac{m\pi}{L}x\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L}x + \frac{m\pi}{L}x\right) \right) dx \\ &= \frac{L}{2\pi(n-m)} \sin\left(\frac{(n-m)\pi}{L}x\right) - \frac{L}{2\pi(n+m)} \sin\left(\frac{(n+m)\pi}{L}x\right) \Big|_0^L = 0. \end{aligned}$$

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen kann auch etwas über das Vorzeichen der Eigenwerte ausgesagt werden:

Satz 2.3. Falls $q(t) \leq 0$, $\alpha\beta \leq 0$ und $\gamma\delta \geq 0$, so sind alle Eigenwerte der Sturm-Liouville-Aufgabe (2.8), (2.9), (2.10) nichtnegativ.

Beweis. Sei λ also ein Eigenwert und $x(t)$ eine zugehörige Eigenfunktion. Wir multiplizieren (2.8) mit der Eigenfunktion und integrieren:

$$\int_a^b x(t)(p(t)x'(t))' dt + \underbrace{\int_a^b q(t)x(t)^2 dt}_{\leq 0} + \lambda \int_a^b x(t)^2 dt = 0$$

Da das mittlere Integral hier nichtpositiv ist, erhält man, wenn man es weglässt, folgende Ungleichung:

$$\lambda \int_a^b x(t)^2 dt \geq - \int_a^b x(t)(p(t)x'(t))' dt.$$

Partielle Integration ergibt

$$- \int_a^b x(t)(p(t)x'(t))' dt = -x(t)p(t)x'(t) \Big|_a^b + \underbrace{\int_a^b x'(t)^2 p(t) dt}_{\geq 0} \geq x(a)p(a)x'(a) - x(b)p(b)x'(b),$$

so dass

$$\lambda \int_a^b x(t)^2 dt \geq x(a)p(a)x'(a) - x(b)p(b)x'(b). \quad (2.18)$$

(2.9) multipliziert mit $\alpha x'(a)$ bzw. $\beta x(a)$ ergibt

$$\alpha^2 x(a)x'(a) + \alpha\beta x'(a)^2 = 0, \quad \alpha\beta x(a)^2 + \beta^2 x(a)x'(a) = 0,$$

Addition liefert

$$(\alpha^2 + \beta^2) x(a)x'(a) = - \underbrace{\alpha\beta}_{\leq 0} (x(a)^2 + x'(a)^2) \geq 0.$$

Mit $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ folgt $x(a)x'(a) \geq 0$ und daher

$$p(a)x(a)x'(a) \geq 0. \quad (2.19)$$

Auf analoge Weise ergibt (2.10)

$$p(b)x(b)x'(b) \leq 0. \quad (2.20)$$

Aus (2.18), (2.19) und (2.20) folgt

$$\lambda \int_a^b x(t)^2 dt \geq 0$$

und damit $\lambda \geq 0$. □

Beispiel 2.4 Im Beispiel 2.2 gelten wegen $q(t) = 0$, $\alpha\beta = 0$, $\gamma\delta = 0$ die Voraussetzungen von Satz 2.3, also hätte man sich die Betrachtung von $\lambda < 0$ in diesem Beispiel ersparen können.

Wir haben bisher Aussagen über Eigenwerte der Sturm-Liouville-Aufgabe hergeleitet, ohne nach ihrer Existenz zu fragen. Diese Frage erfordert tiefergehende Hilfsmittel der Funktionalanalysis wie die Überführung der Sturm-Liouville-Aufgabe in eine äquivalente Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art und die Eigenwerttheorie kompakter Operatoren. Wir können daher folgenden Satz in Rahmen dieser Vorlesung nur angeben:

Satz 2.4. *Wenn die Funktionen $p(t)$ und $q(t)$ sowie die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die weiter oben angegebenen Generalvoraussetzungen erfüllen, so existieren unendlich viele Eigenwerte $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ der Sturm-Liouville-Aufgabe (2.8), (2.9), (2.10). Diese erfüllen $\lambda_n \rightarrow +\infty$ für $n \rightarrow \infty$.*

Zu jedem Eigenwert λ_n gibt es nach Satz 2.2 eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutige Eigenfunktion $x_n(t)$. Durch Multiplikation mit einer geeigneten Konstanten kann immer erreicht werden, dass die Norm

$$\|x_n\| := \sqrt{(x_n, x_n)} = \left(\int_a^b x_n(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad (2.21)$$

gleich 1 wird. Wegen der Orthogonalität von Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten gilt somit

$$(x_n, x_m) = \delta_{nm} \quad (2.22)$$

wobei

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \quad (2.23)$$

das *Kroneckersymbol* heißt. Ein System von Funktionen mit (2.22) heißt *Orthonormalsystem*.

Beispiel 2.5 Wir berechnen die Normen der Eigenfunktionen $x_n(x)$ aus Beispiel 2.2:

$$\|x_n\| = \left(\int_0^L x_n(x)^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx \right)^{1/2} = \left(\left. \frac{x}{2} - \frac{L \sin \frac{2n\pi x}{L}}{4n\pi} \right|_0^L \right)^{1/2} = \left(\frac{L}{2} \right)^{1/2}$$

Indem wir durch diese Norm dividieren, erhalten wir ein Orthonormalsystem aus Eigenfunktionen:

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad (2.24)$$

2.3. Superposition von Produktlösungen

Mit den im letzten Kapitel bestimmten Eigenwerten können wir nun die Produktlösungen vollständig bestimmen.

Beispiel 2.6 Nachdem nun das Eigenwertproblem (2.5), (2.7) gelöst wurde, können wir auch die zweite gewöhnliche Differentialgleichung (2.6) lösen, in die wir die in (2.13) erhaltenen Eigenwerte einsetzen:

$$T''(t) + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} T(t) = 0.$$

Wieder handelt es sich um eine lineare, homogene gewöhnliche Differentialgleichung, für die wir den Exponentialansatz

$$T(t) = e^{\mu t}$$

machen. Die charakteristische Gleichung

$$\mu^2 + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} = 0$$

hat die komplexen Lösungen

$$\mu_{1,2} = \pm i \frac{n\pi c}{L},$$

so dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right)$$

mit freien Konstanten C_n und D_n ist. Tragen wir die erhaltenen Funktionen in den Separationsansatz (2.4) ein, erhalten wir die Produktlösungen

$$u_n(t, x) = \left(C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \right) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Diese erfüllen die partielle Differentialgleichung (2.1) und die Randbedingung (2.2), aber keine von ihnen erfüllt die Anfangsbedingungen (2.3), siehe Abbildung 2.2.

Abbildung 2.2: Animation der Produktlösungen u_n für $n = 1, 2, 3, 4$ (zum Starten anklicken)

Um dennoch Lösungen zu erhalten, die auch die Anfangsbedingungen erfüllt, erinnern wir uns daran, dass gemäß Satz 1.1 eine Linearkombination von Lösungen einer homogenen Differentialgleichung wieder eine Lösung ergibt. Dies gilt auch bei unendlich vielen Funktionen,

sofern die dann entstehende Reihe konvergent ist, was wir zunächst annehmen wollen. Wir bilden also die *Superposition*

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.25)$$

und versuchen, die Konstanten C_n, D_n so anzupassen, dass (2.3) erfüllt werden. Wegen

$$u_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n\pi c}{L} C_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + D_n \frac{n\pi c}{L} \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

führt das auf die Gleichungen

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x), \quad (2.26)$$

$$u_t(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi c}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0. \quad (2.27)$$

Während (2.27) leicht durch die Wahl $D_n = 0$ erfüllt werden kann, führt die Gleichung (2.26) auf eine neue Problemstellung - die Entwicklung einer gegebenen Funktion f in eine Reihe nach Eigenfunktionen einer Sturm-Liouville-Aufgabe.

Wir betrachten weiterhin die Sturm-Liouville-Aufgabe (2.8)–(2.10)) unter den früher gemachten Generalvoraussetzungen. Seien λ_n die Eigenwerte und $x_n(t)$ zugehörige Eigenfunktionen, von denen angenommen werden kann, dass sie ein Orthonormalsystem bilden. Unser Ziel ist es, „willkürliche“ Funktionen f in eine Reihe nach Eigenfunktionen zu entwickeln, also eine Reihe der Form

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n(t) \quad (2.28)$$

mit gewissen zu bestimmenden Koeffizienten c_n . Wie kann man diese erhalten? Wir bilden das Skalarprodukt beider Seiten von (2.28) mit einer Eigenfunktion $x_m(t)$ und erhalten, indem wir ohne nähere Begründung Summation und Skalarprodukt vertauschen

$$(f, x_m) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n, x_m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_n, x_m).$$

Wegen der Orthonormalität (2.22) reduziert sich die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung auf einen Summand, d.h.

$$c_m = (f, x_m)$$

oder ausgeschrieben und mit m ersetzt durch n

$$c_n = \int_a^b f(t) x_n(t) dt. \quad (2.29)$$

Dies ist die gesuchte Formel für die Koeffizienten c_n . Die Entwickelbarkeit von f in eine solche Reihe ist dagegen nicht so einfach zu zeigen, weswegen wir das folgende Ergebnis nur angeben können:

Satz 2.5. Seien λ_n die Eigenwerte und $x_n(t)$ orthonormale Eigenfunktionen der Sturm-Liouville-Aufgabe (2.8)–(2.10) unter den früher gemachten Voraussetzungen an $p(t)$, $q(t)$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dann lässt sich jede auf $[a, b]$ stetig differenzierbare Funktion f , die die Randbedingungen (2.9), (2.10) erfüllt, in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe der Form (2.28) mit Koeffizienten (2.29) entwickeln.

Beispiel 2.7 Die Koeffizienten C_n in (2.26) ergeben sich also zu

$$\begin{aligned}
C_n &= (f, X_n) = \int_0^L f(x) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \int_0^L a(L/2 - |x - L/2|) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
&= -a\sqrt{\frac{L}{2}} \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_0^L + a\sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^{L/2} (x - L/2) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx - a\sqrt{\frac{2}{L}} \int_{L/2}^L (x - L/2) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
&= -a\sqrt{\frac{L}{2}} \frac{L}{n\pi} ((-1)^n - 1) - a\sqrt{\frac{2}{L}} (x - L/2) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_0^{L/2} + a\sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^{L/2} \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
&\quad + a\sqrt{\frac{2}{L}} (x - L/2) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_{L/2}^L - a\sqrt{\frac{2}{L}} \int_{L/2}^L \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
&= a\sqrt{\frac{L}{2}} \frac{L}{n\pi} (1 - (-1)^n) - a\sqrt{\frac{L}{2}} \frac{L}{n\pi} + a\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_0^{L/2} + a\sqrt{\frac{L}{2}} \frac{L}{n\pi} (-1)^n \\
&\quad - a\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_{L/2}^L \\
&= a\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + a\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 2a\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{2aL^2}{(2k+1)^2\pi^2} (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Eingesetzt in (2.25) erhalten wir

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{2aL^2}{(2k+1)^2\pi^2} (-1)^k \cos\left(\frac{(2k+1)\pi c}{L}t\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{L}x\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4aL}{(2k+1)^2\pi^2} (-1)^k \cos\left(\frac{(2k+1)\pi c}{L}t\right) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{L}x\right),
\end{aligned}$$

also eine Reihendarstellung für die gesuchte Lösung. Eine durch numerische Auswertung dieser Reihe erzeugte Graphik findet man in Abbildung 2.3.

Abbildung 2.3: Animation der schwingenden Saite (zum Start anklicken)

Die Lösung gestattet hier sogar eine musikalische Interpretation: Stellt man sich $u_1(t, x)$ als eine Grundschiwingung der Saite vor, so schwingen $u_2(t, x)$, $u_3(t, x)$, ... mit der doppelten, dreifachen, ... Frequenz wie $u_1(t, x)$. Diese Schwingungen werden als *Obertöne* des Grundtons gehört. Der erste Oberton liegt dabei eine Oktave über dem Grundton, der zweite ist die Quinte über der Oktave, der dritte ist die doppelte Oktave, Ein realer Ton ist dabei stets eine Superposition aus Grundton mit verschiedenen Obertönen.

Bemerkung 2.1. Rechnet man mit nicht-normierten Eigenfunktionen x_n der Sturm-Liouville-Auf-

gabe, so ergeben sich die Koeffizienten der Entwicklung (2.28) zu

$$c_n = \frac{(f, x_n)}{(x_n, x_n)} = \frac{\int_a^b f(t)x_n(t) dt}{\int_a^b x_n(t)^2 dt}. \quad (2.30)$$

2.4. Zusammenfassung und weitere Beispiele

Bei der Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit Hilfe der Fourierschen Methode haben wir folgende Schritte kennengelernt:

1. Produktansatz, aufspalten in gewöhnliche Differentialgleichungen oder partielle Differentialgleichungen mit weniger Variablen
2. Formulierung einer Randwertaufgabe, Bestimmung von Eigenwerten und Funktionen
3. Bestimmung der Produktlösungen
4. Superposition der Produktlösungen

Wir wollen diese Schritte nun an einem weiteren Beispiel veranschaulichen.

Beispiel 2.8 Wir betrachten die Wärmeleitung in einem Kreisring. In den Beispielen 1.10 und 1.32 wurden die Gleichungen

$$u_t = c^2 u_{\varphi\varphi} \quad (2.31)$$

$$u(t, 0) = u(t, 2\pi), \quad u_\varphi(t, 0) = u_\varphi(t, 2\pi) \quad (2.32)$$

$$u(0, \varphi) = f(\varphi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \varphi < \pi, \\ 1, & \pi \leq \varphi < 2\pi \end{cases} \quad (2.33)$$

hergeleitet, wobei nun zur Abkürzung $c^2 := a^2/R^2$ gesetzt wurde. Wir machen den Produktansatz

$$u(t, x) = T(t)\Phi(\varphi).$$

Einsetzen in die partielle Differentialgleichung ergibt

$$T'(t)\Phi(\varphi) = c^2 T(t)\Phi''(\varphi)$$

$$\frac{T'(t)}{c^2 T(t)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} =: \lambda,$$

denn jede Seite hängt nur von einer der Variablen ab, muss demzufolge konstant sein. Wir schließen auf die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\Phi''(\varphi) - \lambda\Phi(\varphi) = 0, \quad (2.34)$$

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0. \quad (2.35)$$

Die erste der Periodizitätsbedingungen (2.32) führt auf $T(t)\Phi(0) = T(t)\Phi(2\pi)$. $T(t) = 0$ liefert die uninteressante Lösung $u(t, x) \equiv 0$, deshalb ist nur

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \quad (2.36)$$

relevant. Analog führt die zweite Bedingung in (2.32) auf

$$\Phi'(0) = \Phi'(2\pi). \quad (2.37)$$

Wir lösen daher zuerst (2.34) unter den Randbedingungen (2.36), (2.37). Da es sich wieder um eine lineare, homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten handelt, machen wir einen Exponentialansatz $\Phi(\varphi) = e^{\mu\varphi}$ und erhalten für μ die charakteristische Gleichung

$$\mu^2 - \lambda = 0.$$

Nun können wieder verschiedene Fälle unterschieden werden:

- $\lambda > 0$. Wir finden die Nullstellen $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ und damit die allgemeine Lösung

$$\Phi(\varphi) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\varphi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\varphi}.$$

Einsetzen der Randbedingungen (2.36), (2.37) liefert

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= C_1 e^{\sqrt{\lambda}2\pi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}2\pi} \\ \sqrt{\lambda}C_1 - \sqrt{\lambda}C_2 &= \sqrt{\lambda}C_1 e^{\sqrt{\lambda}2\pi} - \sqrt{\lambda}C_2 e^{-\sqrt{\lambda}2\pi}. \end{aligned}$$

Kürzt man in der zweiten Gleichung $\sqrt{\lambda}$ und addiert anschließend beide Gleichungen, erhält man

$$2C_1 = 2C_1 e^{\sqrt{\lambda}2\pi}$$

und damit $C_1 = 0$. Damit ergibt sich auch $C_2 = 0$ und wir haben die triviale Lösung $\Phi(\varphi) \equiv 0$ erhalten. $\lambda > 0$ ist also kein Eigenwert.

- $\lambda = 0$. Dann ist $\mu = 0$ einzige Nullstelle der charakteristischen Gleichung, und die allgemeine Lösung lautet

$$\Phi(\varphi) = C_0 + C_1 \varphi.$$

Wir setzen wieder die Randbedingungen (2.36), (2.37) ein:

$$C_0 = C_0 + 2\pi C_1, \quad C_1 = C_1.$$

Daher gilt $C_1 = 0$, während C_0 beliebig gewählt werden kann, $\lambda_0 = 0$ ist also Eigenwert zur Eigenfunktion $\Phi_0(\varphi) = C_0$.

- $\lambda < 0$. Wir haben nun die komplexen Nullstellen $\mu_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$ und damit als allgemeine Lösung

$$\Phi(\varphi) = C \cos(\sqrt{-\lambda}\varphi) + D \sin(\sqrt{-\lambda}\varphi).$$

Die Randbedingungen (2.36), (2.37) ergeben nun

$$\begin{aligned} C &= C \cos(\sqrt{-\lambda}2\pi) + D \sin(\sqrt{-\lambda}2\pi) \\ D\sqrt{-\lambda} &= -C\sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}2\pi) + D\sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda}2\pi) \end{aligned}$$

Nach Kürzen von $\sqrt{-\lambda}$ in der letzten Gleichung steht somit das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{-\lambda}2\pi) - 1 & \sin(\sqrt{-\lambda}2\pi) \\ -\sin(\sqrt{-\lambda}2\pi) & \cos(\sqrt{-\lambda}2\pi) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

da. Es hat nichttriviale Lösungen genau dann, wenn die Systemmatrix singulär ist, also ihre Determinante verschwindet:

$$\begin{aligned} 0 &= (\cos(\sqrt{-\lambda}2\pi) - 1)^2 + \sin^2(\sqrt{-\lambda}2\pi) \\ &= \cos^2(\sqrt{-\lambda}2\pi) - 2\cos(\sqrt{-\lambda}2\pi) + 1 + \sin^2(\sqrt{-\lambda}2\pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 - 2 \cos(\sqrt{-\lambda} 2\pi) \\
1 &= \cos(\sqrt{-\lambda} 2\pi) \\
\sqrt{-\lambda} 2\pi &= 2n\pi \\
\lambda_n &= -n^2, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Da $\sin(\sqrt{-\lambda_n} 2\pi) = 0$ ist die Systemmatrix in (2.38) die Nullmatrix, so dass C und D beide beliebig sein können.

Zusammenfassend sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen also

$$\lambda_n = -n^2, \quad \Phi_n(\varphi) = C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Bemerkung: Da die Periodizitätsbedingungen Funktionswerte an verschiedenen Stellen verknüpfen, sind die Randbedingungen (2.36), (2.37) nicht von der Form (2.9), (2.10), so dass – im Gegensatz zu der allgemeinen Aussage von Satz 2.2 – die Eigenräume für $n > 0$ hier sogar zweidimensional sind.

Damit lösen wir jetzt (2.35), also

$$T'(t) + n^2 T = 0.$$

Die Differentialgleichung ist hier trennbar (liesse sich aber auch mit einem Exponentialansatz lösen)

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= -n^2 T \\
\int \frac{dT}{T} &= -n^2 \int dt \\
\ln |T| &= -n^2 t + E \\
T_n(t) &= E_n e^{-n^2 t}
\end{aligned}$$

Damit sind die Produktlösungen

$$u_n(t, \varphi) = (C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)) e^{-n^2 t},$$

wobei $E_n = 1$ gesetzt wurde. Diese erfüllen die partielle Differentialgleichung und die Periodizitätsbedingungen, aber nicht die Anfangsbedingung. Wir bilden daher die Superposition

$$u(t, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)) e^{-n^2 t}$$

Die Anfangsbedingung (2.33) führt auf

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)) = f(\varphi),$$

also die Entwicklung von f in eine Reihe nach Eigenfunktionen. Dies ist hier eine gewöhnliche Fourierreihe. Wir berechnen nun die Koeffizienten gemäß (2.30):

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{\int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \cos^2(n\varphi) d\varphi} = \frac{\int_{\pi}^{2\pi} \cos(n\varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \cos^2(n\varphi) d\varphi} = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} \sin(n\varphi) \Big|_{\pi}^{2\pi}, & n > 0, \\ \frac{1}{2\pi} \varphi \Big|_{\pi}^{2\pi}, & n = 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & n > 0, \\ \frac{1}{2}, & n = 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$D_n = \frac{\int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \sin^2(n\varphi) d\varphi} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\varphi) d\varphi}{\pi} = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\varphi) \Big|_{-\pi}^{2\pi}$$

$$= -\frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{2}{(2k+1)\pi}, & n = 2k+1 \end{cases} \quad (n > 0).$$

Also lautet die Lösung

$$u(t, \varphi) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\varphi)}{2k+1} e^{-(2k+1)^2 t}.$$

Offenbar gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, \varphi) = \frac{1}{2},$$

d.h. die Lösung strebt einem stationären Zustand mit konstanter Temperatur $\frac{1}{2}$ überall zu, siehe auch Abbildung 2.4.

Abbildung 2.4: Wärmeleitung in einem Ring (zum Start anklicken)

2.5. Besselfunktionen

Alle bisherigen Beispiele zur Fourierschen Methode führten auf lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Leider ist das nicht immer der Fall, es können auch lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten auftreten, die dann nicht mehr durch einen Exponentialansatz gelöst werden können. Im Zusammenhang mit Problemen in Polar- und Zylinderkoordinaten taucht häufig die sogenannte *Besselsche Differentialgleichung* der Ordnung $p \geq 0$ auf, die die Form

$$\boxed{x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0} \quad (2.39)$$

hat. Friedrich Wilhelm Bessel war ein Astronom, der 1824 eine umfangreiche Abhandlung über die Lösungen dieser Gleichung veröffentlichte.

Beispiel 2.9 Wir betrachten die schwingende kreisförmige Membran vom Radius a . Nach Einführung von Polarkoordinaten ergibt sich nach Beispiel 1.9 die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 \Delta u = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \right). \quad (2.40)$$

mit $t > 0$, $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$. Dazu wollen wir homogene Randbedingungen

$$u(t, a, \varphi) = 0 \quad (2.41)$$

und zwei Anfangsbedingungen der Form

$$u(0, r, \varphi) = f(r, \varphi), \quad u_t(0, r, \varphi) = 0 \quad (2.42)$$

betrachten, vgl. dazu auch Beispiel 1.19. Schließlich muß bei Polarkoordinaten noch die Periodizität in φ beachtet werden, d.h. wir fordern

$$u(t, r, 0) = u(t, r, 2\pi), \quad u_\varphi(t, r, 0) = u_\varphi(t, r, 2\pi). \quad (2.43)$$

Der Separationsansatz lautet nun

$$u(t, r, \varphi) = T(t)W(r, \varphi).$$

Eingesetzt in (2.40) ergibt sich

$$T''W = c^2 T \Delta W,$$

also

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{\Delta W(r, \varphi)}{W(r, \varphi)} =: -\lambda^2,$$

was auf

$$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0 \quad (2.44)$$

und

$$\Delta W + \lambda^2 W = 0, \quad (2.45)$$

die sogenannte *Helmholtzgleichung*, führt. Dabei haben wir uns wegen $\lambda^2 > 0$ auf die zu erwartende periodische Lösung der Gleichung (2.44) beschränkt. (2.41) führt auf die Randbedingung

$$W(a, \varphi) = 0. \quad (2.46)$$

(2.45), (2.46) ist ein Eigenwertproblem für eine partielle Differentialgleichung (genauer gesagt: die Laplacegleichung) und kann durch einen erneuten Separationsansatz gelöst werden. Wir setzen

$$W(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

an und setzen in (2.45) ein:

$$\begin{aligned} R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' + \lambda^2 R\Phi &= 0 \\ \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \lambda^2 &= 0 \\ r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \lambda^2 r^2 &= -\frac{\Phi''}{\Phi} =: \mu. \end{aligned}$$

Dies führt auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda^2 r^2 - \mu) R = 0 \quad (2.47)$$

und

$$\Phi'' + \mu \Phi = 0. \quad (2.48)$$

(2.43) liefert die Randbedingungen

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi). \quad (2.49)$$

Die Eigenwertaufgabe (2.48), (2.49) wurde bereits in Beispiel 2.8 gelöst. Die Eigenwerte sind demnach $\mu_n = n^2$, die Eigenfunktionen

$$\Phi_n(\varphi) = C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.50)$$

Mit diesem Wert für μ ist nun (2.47) unter der Randbedingung

$$R(a) = 0, \quad (2.51)$$

die sich aus (2.46) ergibt, zu lösen. Die Differentialgleichung, bekannt als *parametrisierte Besselsche Differentialgleichung*, kann durch eine einfache Variablentransformation in die Besselsche überführt werden. Setzen wir nämlich $x = \lambda r$ und

$$y(x) := R\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad (2.52)$$

so folgt

$$y'(x) = R'\left(\frac{x}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda}, \quad y''(x) = R''\left(\frac{x}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda^2}.$$

Einsetzen in (2.47) liefert

$$r^2 \lambda^2 y'' + x \lambda y' + (\lambda^2 r^2 - n^2) y = 0,$$

also die Besselsche Differentialgleichung (2.39) mit $p = n$.

Zur Lösung der Besselschen Differentialgleichung (2.39) machen wir den Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{q+m}, \quad a_0 \neq 0$$

und versuchen, q und die Koeffizienten a_m zu bestimmen. Ableiten ergibt zunächst

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (q+m) x^{q+m-1}, \quad y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (q+m)(q+m-1) x^{q+m-2},$$

nun können wir in (2.39) einsetzen:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} a_m (q+m)(q+m-1) x^{q+m} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m (q+m) x^{q+m} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{q+m+2}}_{= \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{q+m}} - \sum_{m=0}^{\infty} p^2 a_m x^{q+m} &= 0 \\ a_0(q(q-1) + q - p^2) x^q + a_1((q+1)q + (q+1) - p^2) x^{q+1} \\ + \sum_{m=2}^{\infty} [a_m((q+m)(q+m-1) + (q+m) - p^2) + a_{m-2}] x^{q+m} &= 0 \end{aligned}$$

Nullsetzen aller Koeffizienten zeigt

$$a_0(q^2 - p^2) = 0, \quad (2.53)$$

$$a_1((q+1)^2 - p^2) = 0, \quad (2.54)$$

$$a_m((q+m)^2 - p^2) + a_{m-2} = 0 \quad (m \geq 2). \quad (2.55)$$

Aus (2.53) folgt wegen $a_0 \neq 0$ dass $q = \pm p$. Wir unterscheiden demnach zwei Fälle:

- Falls $q = p$, so folgt aus (2.54) dass $a_1 = 0$. (2.55) liefert die Rekursionsformel

$$a_m = -\frac{a_{m-2}}{(p+m)^2 - p^2} = -\frac{a_{m-2}}{m(2p+m)}.$$

Sie zeigt, dass alle Koeffizienten mit ungeradem Index verschwinden, $a_1 = a_3 = \dots = 0$. Um die Koeffizienten a_{2k} zu ermitteln, rechnen wir

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2 k(k+p)} = \frac{a_{2k-4}}{2^4 k(k-1)(k+p)(k+p-1)} = \dots = \frac{a_0}{2^{2k} k!(k+p)(k+p-1) \dots (p+1)}. \quad (2.56)$$

Dies lässt sich hübscher schreiben, wenn man die traditionelle Wahl

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$$

trifft. Wegen der Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

ergibt sich nämlich

$$\Gamma(1+p) \cdot (1+p)(2+p) \dots (k+p) = \Gamma(k+p+1).$$

Also ist die *Besselfunktion erster Art* der Ordnung p

$$J_p(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \quad (2.57)$$

eine Lösung der Differentialgleichung (2.39). Abbildung 2.5 zeigt die Graphen einiger Besselfunktionen erster Art.

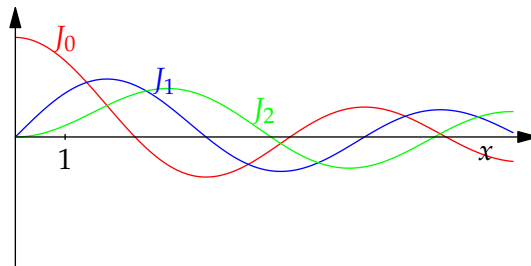


Abbildung 2.5: Einige Besselfunktionen erster Art

- Falls $q = -p$, so führt eine ähnliche Rechnung auf die Funktion

$$J_{-p}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}.$$

Da die Gammafunktion jedoch für nicht-positive ganze Zahlen nicht definiert ist, existiert diese Lösung nur für nicht-ganze $p > 0$. Man bildet nun

$$Y_p(x) := \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}, \quad p \notin \mathbb{Z},$$

was eine Linearkombination von J_p und J_{-p} darstellt. Man kann zeigen, dass sie auch für $p \rightarrow n \in \mathbb{N}$ einen Grenzwert Y_n hat. Y_p stellt damit für alle $p \geq 0$ eine zweite, linear unabhängige Lösung von (2.39) dar und heißt *Besselfunktion zweiter Art* der Ordnung p . Abbildung 2.6 zeigt die Graphen einiger dieser Funktionen. J_p und Y_p bilden ein Fundamentalsystem für die Besselsche Differentialgleichung.

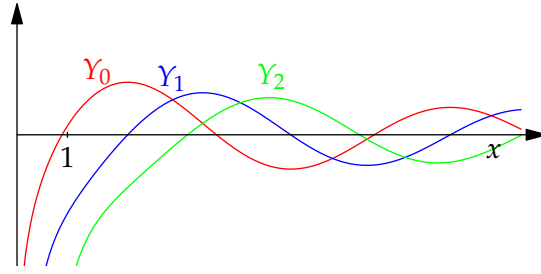


Abbildung 2.6: Einige Besselfunktionen zweiter Art

p	α_{p1}	α_{p2}	α_{p3}	α_{p4}
0	2.404826	5.520078	8.653728	11.791534
1	3.831706	7.015587	10.173468	13.323692
2	5.135622	8.417244	11.619841	14.795952

Tabelle 1: Erste vier positive Nullstellen α_{pk} der Besselfunktionen erster Art $J_p(x)$ für $p = 0, 1, 2$.

Abbildung 2.5 suggeriert, dass J_p positive Nullstellen hat. Tatsächlich kann man zeigen, dass es unendlich viele Nullstellen $0 < \alpha_{p1} < \alpha_{p2} < \dots$ mit $\alpha_{pk} \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ gibt. Tabelle 1 gibt einige numerische Beispielwerte wieder.

Für $a > 0$ setzen wir

$$\lambda_{pj} := \frac{\alpha_{pj}}{a}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Dann haben die Funktionen $x \mapsto J_p(\lambda_{pj}x)$ Nullstellen bei $x = a$. Außerdem haben diese Funktionen eine bemerkenswerte Orthogonalitätseigenschaft:

Satz 2.6. Seien $j, k \in \{1, 2, \dots\}$. Dann gilt mit obigen Bezeichnungen

$$\int_0^a J_p(\lambda_{pj}x) J_p(\lambda_{pk}x) x dx = 0, \quad j \neq k, \quad (2.58)$$

$$\int_0^a J_p^2(\lambda_{pj}x) x dx = \frac{a^2}{2} J_{p+1}^2(\alpha_{pj}). \quad (2.59)$$

Beweis. Siehe [1] oder [3]. □

Diese Orthogonalitätseigenschaften können – wie im Abschnitt 2.3 – zur Koeffizientenbestimmung bei Reihenentwicklungen verwendet werden. Soll etwa eine auf $[0, a]$ definierte Funktion g in eine *Fourier-Bessel-Reihe*, also eine Reihe der Form

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_p(\lambda_{pj}x)$$

entwickelt werden, so liefert eine Multiplikation mit x und $J_p(\lambda_{pk}x)$ und anschließende Integration über $[0, a]$:

$$\int_0^a g(x) J_p(\lambda_{pk}x) x dx = \int_0^a \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_p(\lambda_{pj}x) J_p(\lambda_{pk}x) x dx = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \int_0^a J_p(\lambda_{pj}x) J_p(\lambda_{pk}x) x dx$$

$$= A_k \frac{a^2}{2} J_{p+1}^2(\alpha_{pk}),$$

so dass wir erhalten

$$A_k = \frac{2}{a^2 J_{p+1}^2(\alpha_{pk})} \int_0^a g(x) J_p(\lambda_{pk} x) x dx. \quad (2.60)$$

Beispiel 2.10 (Fortsetzung von Beispiel 2.9) Wir kennen nun die Funktionen J_n und Y_n als Lösungen der Besselschen Differentialgleichung (2.39) mit $p = n$. Allerdings sind dabei die Funktionen Y_n in 0 unbeschränkt (siehe Abbildung 2.6), was zu unbeschränkten Lösungen der Wellengleichung im Ursprung führen würde. Deshalb kommen hier nur die Funktionen J_n als Lösungen in Frage. Die Lösung der parametrisierten Besselschen Differentialgleichung (2.47) ist wegen (2.52)

$$R(r) = J_n(\lambda r).$$

Wegen der Randbedingung (2.51) muß λa eine Nullstelle von J_n sein, also sind

$$\lambda_{nm} := \frac{\alpha_{nm}}{a}, \quad R_{nm}(r) := J_n(\lambda_{nm} r), \quad n = 0, 1, \dots, m = 1, 2, \dots$$

die Lösungen von (2.47), (2.51). Wir erhalten mit (2.50) die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems (2.45), (2.46) für die Helmholtzgleichung als

$$\lambda = \lambda_{nm}, \quad W_{nm}(r, \varphi) = J_n(\lambda_{nm} r) (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi), \quad n = 0, 1, \dots, m = 1, 2, \dots$$

Es bleibt, mit $\lambda = \lambda_{nm}$ die Differentialgleichung (2.44) zu lösen. Da sie konstante Koeffizienten hat, können wir mit einem Exponentialansatz rechnen und erhalten

$$T_{nm}(t) = A_{nm} \cos(\lambda_{nm} ct) + B_{nm} \sin(\lambda_{nm} ct).$$

Damit lauten die Produktlösungen

$$u_{nm}(t, r, \varphi) = (A_{nm} \cos(\lambda_{nm} ct) + B_{nm} \sin(\lambda_{nm} ct)) J_n(\lambda_{nm} r) (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi).$$

Wir bilden davon die Superposition

$$\begin{aligned} u(t, r, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(t, r, \varphi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm} \cos(\lambda_{nm} ct) + B_{nm} \sin(\lambda_{nm} ct)) J_n(\lambda_{nm} r) (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \end{aligned}$$

und müssen durch Anpassung der Konstanten die Anfangsbedingungen (2.42) erfüllen, d.h. es muss gelten

$$\begin{aligned} f(r, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_n(\lambda_{nm} r) (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \\ 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \lambda_{nm} c J_n(\lambda_{nm} r) (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung kann durch $B_{nm} = 0$ für alle n, m erfüllt werden. Setzt man in der ersten $C_{nm} := A_{nm} C_n$ und $D_{nm} := A_{nm} D_n$, so nimmt sie die Form

$$\begin{aligned} f(r, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nm} r) (C_{nm} \cos n\varphi + D_{nm} \sin n\varphi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nm} r) C_{nm} \right) \cos n\varphi + \left(\sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nm} r) D_{nm} \right) \sin n\varphi \right) \end{aligned}$$

$$= a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(r) \cos n\varphi + b_n(r) \sin(n\varphi))$$

an. Dies ist eine gewöhnliche Fourierreihe mit r -abhängigen Koeffizienten

$$a_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nm}r) C_{nm}, \quad b_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nm}r) D_{nm}.$$

Damit sind C_{nm} und D_{nm} die Koeffizienten einer Fourier-Bessel-Entwicklung von $a_n(r)$ bzw. $b_n(r)$, die wir wegen (2.60) erhalten können aus

$$C_{nm} = \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(\alpha_{nm})} \int_0^a a_n(r) J_n(\lambda_{nm}r) r dr, \quad D_{nm} = \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(\alpha_{nm})} \int_0^a b_n(r) J_n(\lambda_{nm}r) r dr.$$

Andererseits gelten die Koeffizientenformeln für eine gewöhnliche Fourierreihe, nach denen

$$\begin{aligned} a_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) d\varphi, \\ a_n(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad (n > 0) \\ b_n(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad (n > 0). \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung

$$u(t, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\lambda_{nm}ct) J_n(\lambda_{nm}r) (C_{nm} \cos n\varphi + D_{nm} \sin n\varphi)$$

mit

$$\begin{aligned} C_{0m} &= \frac{1}{\pi a^2 J_1^2(\alpha_{0m})} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_0(\lambda_{0m}r) r d\varphi dr, \\ C_{nm} &= \frac{2}{\pi a^2 J_{n+1}^2(\alpha_{nm})} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_n(\lambda_{nm}r) \cos(n\varphi) r d\varphi dr \quad (n > 0), \\ D_{0m} &= 0, \\ D_{nm} &= \frac{2}{\pi a^2 J_{n+1}^2(\alpha_{nm})} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_n(\lambda_{nm}r) \sin(n\varphi) r d\varphi dr \quad (n > 0). \end{aligned}$$

3. Die Methode der Fouriertransformation

3.1. Einführung der Fouriertransformation

Eine *Integraltransformation* $\mathcal{F}$ ordnet einer *Originalfunktion* f mit Hilfe einer Abbildungsvorschrift der Form

$$F(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \int_a^b K(x, \xi) f(x) dx$$

eine *Bildfunktion* $F = \mathcal{F}f$ zu. Dabei ist $K(x, \xi)$ eine gegebene Funktion, genannt *Kernfunktion*. Zweck der Integraltransformation ist es, ein schwer lösbares Problem für die Originalfunktion f in ein leichter lösbares Problem für die Bildfunktion F umzuwandeln.

Die erste Integraltransformation, mit der wir uns beschäftigen wollen, ist die *Fouriertransformation*, die gegeben ist durch

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx. \quad (3.1)$$

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz des Integrals (3.1) ist $f \in L^1(\mathbb{R})$, d.h. das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

existiert im Lebesgueschen Sinne. Unter dieser Voraussetzung ist die *Fouriertransformierte* $\mathcal{F}f$ stetig und

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}f(\xi) = 0, \quad (3.2)$$

bekannt als *Satz von Riemann-Lebesgue*.

Wir führen nun die wichtigsten Eigenschaften der Fouriertransformation auf:

Satz 3.1. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Falls die folgenden Fouriertransformationen existieren, gelten folgende Rechenregeln ($k \in \mathbb{N}$):

$$i^k d_{\xi}^k \mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}(x^k f)(\xi) \quad (3.3)$$

$$(i\xi)^k \mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}(d_x^k f)(\xi) \quad (3.4)$$

Beweis. Wir differenzieren (3.1) nach ξ unter dem Integralzeichen, dann folgt $i d_{\xi} \mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}(x f)(\xi)$. k -fache Anwendung ergibt (3.3).

Partielle Integration von (3.1) ergibt $i \xi \mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}(f')(\xi)$. k -malige Anwendung liefert (3.4). $\square$

In Worten sagt Satz 3.1: Einer Differentiation im Originalbereich entspricht eine Multiplikation im Bildbereich, einer Multiplikation im Originalbereich entspricht eine Differentiation im Bildbereich. Dies wird für die Anwendung auf partielle Differentialgleichungen von entscheidender Bedeutung sein.

Wir berechnen nun die Fouriertransformierten einiger Funktionen:

Beispiel 3.1 Sei $f_a(x) = e^{-a|x|}$ mit $a > 0$. Nun setzen wir in die Definition der Fouriertransformation ein und teilen das Integral in zwei Teile:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f_a)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} e^{-a|x|} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(i\xi+a)x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-(i\xi-a)x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-(i\xi+a)x}}{-(i\xi+a)} \Big|_0^{\infty} + \frac{e^{-(i\xi-a)x}}{-(i\xi-a)} \Big|_{-\infty}^0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{(i\xi+a)} - \frac{1}{(i\xi-a)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-2a}{-\xi^2 - a^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}. \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{F}f_a(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \xi^2}.$$

Beispiel 3.2 Sei δ_a die *Deltadistribution*. Dies ist eine *verallgemeinerte Funktion* oder *Distribution*, die $\int_{\mathbb{R}} \delta_a(x) f(x) dx = f(a)$ für alle glatten Funktionen f mit kompaktem Träger erfüllt. Wir erhalten insbesondere

$$\mathcal{F}(\delta_a)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ia\xi}.$$

Beispiel 3.3 Sei $f_a(x) = e^{-ax^2}$ mit $a > 0$ eine Gaußsche Glockenkurve und

$$F_a(\xi) = \mathcal{F}f_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} e^{-ax^2} dx$$

ihre Fouriertransformierte. Differenzieren nach ξ liefert

$$\begin{aligned} F'_a(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -ix e^{-ix\xi} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{d}{dx} \left(\frac{ie^{-ax^2}}{2a} \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-ix\xi} \frac{ie^{-ax^2}}{2a} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -i\xi e^{-ix\xi} \frac{ie^{-ax^2}}{2a} dx \right) \\ &= -\frac{\xi}{2a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} e^{-ax^2} dx = -\frac{\xi}{2a} F_a(\xi), \end{aligned}$$

also eine gewöhnliche Differentialgleichung für F_a . Trennung der Veränderlichen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{dF_a}{F_a} &= -\frac{\xi}{2a} d\xi \\ \int \frac{dF_a}{F_a} &= -\int \frac{\xi}{2a} d\xi \\ \ln |F_a| &= -\frac{\xi^2}{4a} + C \\ F_a(\xi) &= C e^{-\frac{\xi^2}{4a}}. \end{aligned}$$

Als Konstante ergibt sich

$$C = F_a(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx.$$

Substituieren wir $y = \sqrt{ax}$, $dx = \frac{dy}{\sqrt{a}}$, erhalten wir

$$C = \frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

wobei der Wert des letzten Integrals (das eine wichtige Rolle bei der Normalverteilung spielt), durch eine zweidimensionale Integration und Umrechnung auf Polarkoordinaten erhalten werden kann:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt dass

$$\mathcal{F}f_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{1}{4a}\xi^2}. \quad (3.5)$$

Inbesondere geht $f_{1/2}$ unter der Fouriertransformation in sich selbst über:

$$\mathcal{F}f_{1/2}(\xi) = f_{1/2}(\xi)$$

Hat man ein Problem im Bildbereich gelöst, entsteht die Aufgabe, die zu einer Bildfunktion gehörige Originalfunktion zu finden. Das ist Aufgabe der *inversen Fouriertransformation*. Leider ist für $f \in L^1(\mathbb{R})$ nicht automatisch auch $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$. Setzt man dies voraus, gilt:

Satz 3.2. Falls $f, \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, gilt die Fouriersche Umkehrformel

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \mathcal{F}f(\xi) d\xi =: \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(x). \quad (3.6)$$

Man beachte, dass die Umkehrformel sich nun durch das Vorzeichen des Exponenten der Exponentialfunktion unterscheidet, wir haben also

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \mathcal{F}f(-x). \quad (3.7)$$

Dieser Zusammenhang wird mitunter ausgenutzt, um die inverse Fouriertransformation zu bestimmen, wenn man bereits die Fouriertransformation einer Funktion kennt.

Für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ist ihre *Faltung* die durch

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \quad (3.8)$$

definiert Funktion. Es zeigt sich nun, dass das Faltungsprodukt von zwei Originalfunktionen unter der Fouriertransformation bis auf einen Faktor in das punktweise Produkt der Fouriertransformierten übergeht:

Satz 3.3. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}f)(\xi) \cdot (\mathcal{F}g)(\xi).$$

Beweis. Wir setzen die Definition der Fouriertransformation und dann die des Faltungsproduktes ein. Anschließend vertauschen wir die Integrationsreihenfolge und substituieren $z = x - y$, $dz = dx$ bei festgehaltenem y :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} (f * g)(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x-y) dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(z+y)\xi} f(z) dz dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iy\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz\xi} f(z) dz dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iy\xi} (\mathcal{F}f)(\xi) dy \\ &= (\mathcal{F}f)(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iy\xi} dy \\ &= \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}f)(\xi)(\mathcal{F}g)(\xi) \end{aligned}$$

□

3.2. Anwendung auf partielle Differentialgleichungen

Lösungen partieller Differentialgleichungen sind Funktionen, die von mindestens zwei Variablen abhängen. Wir werden die Fouriertransformation nur bezüglich einer dieser Variablen anwenden, man spricht daher von der *partiellen Fouriertransformation*. Ist beispielsweise $f(x, y)$ eine Funktion von x und y , bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_x$ die Fouriertransformation von $x \mapsto f(x, y)$ bei festgehaltenem y , also

$$\mathcal{F}_x f(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x, y) dx,$$

mit $\mathcal{F}_y$ dagegen die Fouriertransformation von $y \mapsto f(x, y)$ bei festgehaltenem x , also

$$\mathcal{F}_y f(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(x, y) dy.$$

Die Gesetze für die Fouriertransformation sind dann sinngemäss anzuwenden. So erhält man als Fouriertransformierte bezüglich x der partiellen Ableitung $\partial_x^k f(x, y)$ entsprechend (3.4)

$$\mathcal{F}_x(\partial_x^k f)(\xi, y) = (i\xi)^k \mathcal{F}_x f(\xi, y).$$

Setzt man hingegen eine partielle Ableitung $\partial_y^k f(x, y)$ in die Fouriertransformation $\mathcal{F}_x$ bezüglich x ein, kann man (unter gewissen Voraussetzungen) die Ableitung einfach aus dem Fourierintegral herausziehen und erhält

$$\mathcal{F}_x(\partial_y^k f)(\xi, y) = \partial_y^k \mathcal{F}_x f(\xi, y).$$

Für die inverse partielle Fouriertransformation nutzen wir eine analoge Bezeichnungsweise. Ist beispielsweise $g(\xi, y) = \mathcal{F}_x f(\xi, y)$, so ist unter geeigneten Voraussetzungen (vgl. Satz 3.2) $f(x, y) = \mathcal{F}_\xi^{-1} g(x, y)$.

Beispiel 3.4 Wir lösen nun das Cauchy-Problem für die Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0) \quad (3.9)$$

$$u(0, x) = f(x) \quad (3.10)$$

$$u_t(0, x) = g(x) \quad (3.11)$$

Da die gesuchte Funktion nur bezüglich x auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, kommt nur die Bildung der partiellen Fouriertransformation bezüglich x in Frage. Wir bezeichnen die transformierte Funktion mit

$$v(t, \xi) := \mathcal{F}_x f(t, \xi).$$

Daher ist für die partielle Ableitung u_{xx} die Regel aus Satz 3.1 anzuwenden, während sich die Ableitungen nach t einfach mit der Bildung der Fouriertransformierten bezüglich x vertauschen:

$$\mathcal{F}_x(u_{xx})(t, \xi) = (i\xi)^2 v(t, \xi), \quad \mathcal{F}_x(u_{tt}) = v_{tt}(t, \xi).$$

Somit liefert die Anwendung der Fouriertransformation auf 3.9

$$v_{tt} = -c^2 \xi^2 v.$$

Da hier nur noch Ableitungen nach t vorkommen, ist dies (bei festgehaltenem ξ) eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung, die wir wieder durch einen Exponentialansatz $v(t, \xi) = e^{\lambda t}$ lösen. Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 = -c^2 \xi^2$$

hat die Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm ic\xi$, die allgemeine Lösung lautet daher

$$v(t, \xi) = C(\xi)e^{ic\xi t} + D(\xi)e^{-ic\xi t},$$

Anwendung von $\mathcal{F}_x$ auf die Anfangsbedingungen (3.10), (3.11) ergibt

$$v(0, \xi) = \mathcal{F}f(\xi), \quad v_t(0, \xi) = \mathcal{F}g(\xi).$$

Mit

$$v_t(t, \xi) = Cic\xi e^{ic\xi t} - Dic\xi e^{-ic\xi t}$$

führt dies auf das System

$$C + D = \mathcal{F}f(\xi), \quad (C - D)ic\xi = \mathcal{F}g(\xi),$$

woraus wir

$$C = \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}f(\xi) + \frac{\mathcal{F}g(\xi)}{ic\xi} \right), \quad D = \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}f(\xi) - \frac{\mathcal{F}g(\xi)}{ic\xi} \right)$$

und damit

$$v(t, \xi) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}f(\xi) + \frac{\mathcal{F}g(\xi)}{ic\xi} \right) e^{ic\xi t} + \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}f(\xi) - \frac{\mathcal{F}g(\xi)}{ic\xi} \right) e^{-ic\xi t},$$

erhalten. Dies ist die partielle Fouriertransformierte der gesuchten Lösung, es bleibt also nur noch, diese Funktion rückzutransformieren. Unter Beachtung von (3.2) rechnen wir

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \mathcal{F}_\xi^{-1} v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} v(t, \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left(\mathcal{F}f(\xi) (e^{ic\xi t} + e^{-ic\xi t}) + \frac{\mathcal{F}g(\xi)}{ic\xi} (e^{ic\xi t} - e^{-ic\xi t}) \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{F}f(\xi) (e^{i(x+ct)\xi} + e^{i(x-ct)\xi}) + \frac{\mathcal{F}g(\xi)}{ic\xi} (e^{i(x+ct)\xi} - e^{i(x-ct)\xi}) \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}g(\xi) \int_{x-ct}^{x+ct} e^{i\xi y} dy d\xi \\ &= \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c\sqrt{2\pi}} \int_{x-ct}^{x+ct} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi y} \mathcal{F}g(\xi) d\xi dy \end{aligned}$$

und erhalten

$$u(x, y) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy.$$

Dieses Ergebnis ist als *Formel von d'Alembert* (entdeckt 1746) bekannt. Es zeigt, dass die Anfangsauslenkung f in zwei Teile geteilt wird, die sich mit der Geschwindigkeit c nach links. bzw. rechts bewegen. Der Einfluß der Anfangsgeschwindigkeit wirkt sich nur in einem Intervall aus, dass ebenfalls mit Geschwindigkeit c nach links und rechts wächst.

Beispiel 3.5 Wir lösen nun das Dirichlet-Problem für die Laplacegleichung in der Halbebene:

$$\Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (y > 0, x \in \mathbb{R}) \quad (3.12)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (3.13)$$

$$u(x, y) \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty). \quad (3.14)$$

Hier kommt nur die Fouriertransformation bezüglich x in Frage, denn bezüglich y ist u nur auf einer Halbachse definiert. Wir setzen also

$$v(\xi, y) := \mathcal{F}_x u(\xi, y)$$

und erhalten durch Transformation der Gleichungen (3.12) bis (3.14)

$$-\xi^2 v + v_{yy} = 0, \quad (3.15)$$

$$v(\xi, 0) = \mathcal{F}f(\xi), \quad (3.16)$$

$$v(\xi, y) \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty). \quad (3.17)$$

Wir lösen zuerst die gewöhnliche Differentialgleichung (3.15) durch den Ansatz $v = e^{\lambda y}$. Die charakteristische Gleichung

$$-\xi^2 + \lambda^2 = 0$$

hat die Lösungen $\lambda = \pm \xi$. Also ist die allgemeine Lösung

$$v(\xi, y) = C(\xi)e^{\xi y} + D(\xi)e^{-\xi y}.$$

Die Bedingung (3.17) zeigt nun, dass $C(\xi) = 0$ für $\xi > 0$ und $D(\xi) = 0$ für $\xi < 0$. Daher können wir die Lösung schreiben als

$$v(\xi, y) = E(\xi)e^{-|\xi|y}.$$

Die transformierte Randbedingung (3.16) zeigt nun, dass $E(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)$, so dass

$$v(\xi, y) = \mathcal{F}f(\xi)e^{-|\xi|y}$$

die Fouriertransformierte der Lösung ist. Wir haben also ein Produkt im Bildraum erhalten, das nach dem Faltungssatz 3.3 in ein Faltungsprodukt im Originalraum übergeht:

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * \mathcal{F}_\xi^{-1}(e^{-|\xi|y})$$

Aus Beispiel 3.1 kennen wir die Fouriertransformierte von $x \mapsto e^{-|x|y}$ mit $y > 0$:

$$\mathcal{F}(e^{-|x|y})(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{y^2 + \xi^2}.$$

Ersetzen wir hier ξ durch $-\xi$, erhalten wir den Wert der inversen Fouriertransformation

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-|x|y})(\xi) = \mathcal{F}(e^{-|x|y})(-\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{y^2 + (-\xi)^2}.$$

Vertauscht man nun die Bezeichnungen ξ und x , erhält man wieder die üblichen Variablenbezeichnungen:

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|y})(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{y^2 + x^2}$$

Daher liefert das Faltungsprodukt von f mit dieser Funktion die sogenannte *Poissonsche Integralformel* für die Halbebene:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} f(t) dt \quad x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Beispiel 3.6 Schließlich behandeln wir die Wärmeleitung in einem unendlich langen Stab, modelliert durch das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, & (x \in \mathbb{R}, t > 0) \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

Wir bilden abermals die Fouriertransformation bezüglich der Variablen x und erhalten für $v(t, \xi) := \mathcal{F}_x u(t, \xi)$ das parameterabhängige Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} v_t &= k(i\xi)^2 v = -k\xi^2 v, \\ v(0, \xi) &= \mathcal{F}f(\xi). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dieses Problem kann durch Trennung der Veränderlichen gelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= -k\xi^2 dt \\ \int \frac{dv}{v} &= - \int k\xi^2 dt \\ \ln |v| &= -k\xi^2 t + C \\ v(t, \xi) &= C(\xi) e^{-k\xi^2 t}. \end{aligned}$$

(3.18) zeigt nun, dass $C(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)$, so dass

$$v(t, \xi) = e^{-k\xi^2 t} (\mathcal{F}f)(\xi).$$

Dies ist ein Produkt im Bildraum, nach der Rücktransformation entsteht daraus nach Satz 3.3 ein Faltungsprodukt:

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (F_\xi^{-1} g) * f, \quad g(\xi) = e^{-k\xi^2 t}.$$

Laut Beispiel 3.3 ist die (inverse) Fouriertransformation von g gegeben durch

$$\mathcal{F}_\xi^{-1} g(x) = \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Daher gelangen wir zur Lösungsdarstellung

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y) dy$$

Abbildung 3.1 zeigt die Kernfunktion dieses Integrals für verschiedene Zeiten. Man kann sich also die Entstehung der Temperatur $u(t, x)$ als gewichtete Mittelung der Anfangstemperatur f vorstellen, wobei Werte $f(y)$ umso geringer gewichtet werden, je weiter y von x entfernt ist. Je kleiner t ist, desto stärker ist der Kern um x konzentriert, für $t \rightarrow 0+$ strebt er gegen die Deltadistribution δ_x , so dass $u(t, x) \rightarrow f(x)$ gegen seine Anfangswerte konvergiert.

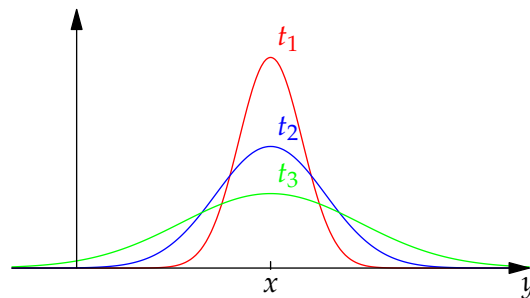


Abbildung 3.1: Darstellung der Kernfunktion $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}$ für verschiedene Zeiten $0 < t_1 < t_2 < t_3$

4. Die Methode der Laplacetransformation

4.1. Einführung der Laplacetransformation

Die *Laplacetransformation* ist eine weitere Integraltransformation, die zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen verwendet werden kann. Im Gegensatz zur Fouriertransformation ist die Laplacetransformation bestens geeignet, um Probleme auf halb-unendlichen Intervallen zu diskutieren. Um die Laplacetransformation zu definieren, benötigen wir – wie bei der Fouriertransformation – eine Klasse zulässiger Funktionen. Dazu setzen wir für $\nu \in \mathbb{R}$

$$L_\nu^1(0, \infty) := \left\{ f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} : \int_0^\infty |f(t)| e^{-\nu t} dt < \infty \right\}.$$

Sei $f \in L_\nu^1(0, \infty)$. Dann ist die *Laplace transformierte* $\mathcal{L}f$ gegeben durch

$$\boxed{\mathcal{L}f(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} s \geq \nu.} \quad (4.1)$$

Tatsächlich konvergiert für $f \in L_\nu^1(0, \infty)$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s \geq \nu$ das Integral in (4.1) absolut:

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt = \int_0^\infty |f(t)| |e^{-(\operatorname{Re} s + i \operatorname{Im} s)t}| dt = \int_0^\infty |f(t)| e^{-\operatorname{Re} s t} dt \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-\nu t} dt < \infty.$$

Die Laplace transformierte ist also in der Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq \nu\}$ definiert, siehe Abbildung 4.1.

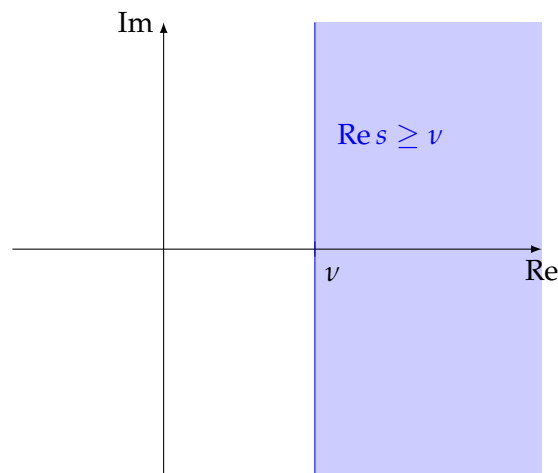


Abbildung 4.1: Die Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq \nu\}$

Wir berechnen nun eine wichtige Laplace transformierte.

Beispiel 4.1 Für $a \in \mathbb{C}$ definieren wir die Funktion

$$\chi_{-a} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \chi_{-a}(t) = e^{-at} \quad (4.2)$$

und bestimmen ihre Laplace transformierte:

$$(\mathcal{L}\chi_{-a})(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-at} dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{-(s+a)} e^{-(s+a)t} \Big|_0^R = \frac{1}{s+a}$$

für $\operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} a$. Aus

$$\mathcal{L}(\chi_{-a})(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} a \quad (4.3)$$

folgt insbesondere für $a = 0$

$$\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (4.4)$$

Wir führen nun die wichtigsten Rechenregeln für die Laplacetransformation auf:

Satz 4.1. Seien $v \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in L_v^1(0, \infty)$ und $c_1, c_2, s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s \geq v$. Dann gilt auch $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in L_v^1(0, \infty)$ und

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(s) = c_1 \mathcal{L} f_1(s) + c_2 \mathcal{L} f_2(s).$$

Beweis. Folgt aus der Linearität des Integrals. □

Wir wenden dies an, um weitere Laplacetransformierte zu berechnen:

Beispiel 4.2 Sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \cos t$ die Kosinusfunktion. Wegen $|\cos x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f \in L_v^1(0, \infty)$ für alle $v > 0$. Da

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

gilt $f = \frac{1}{2}\chi_i + \frac{1}{2}\chi_{-i}$, und wir erhalten unter Ausnutzung von Beispiel 4.1 und der Linearität aus Satz 4.1 für $\operatorname{Re} s > 0$

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\chi_i(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\chi_{-i}(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s-i} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+i} = \frac{s+i+s-i}{2(s-i)(s+i)} = \frac{s}{s^2+1}.$$

Da man bei der Laplacetransformation immer den Integrationsbereich $(0, \infty)$ betrachtet, schreibt man auch suggestiv $\mathcal{L}(\cos)$ statt $\mathcal{L}(f)$ und erhält

$$\mathcal{L}(\cos)(s) = \frac{s}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (4.5)$$

Beispiel 4.3 Sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \sin t$ die Sinusfunktion. Wegen $|\sin x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f \in L_v^1(0, \infty)$ für alle $v > 0$. Da

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

gilt $f = \frac{1}{2i}\chi_i - \frac{1}{2i}\chi_{-i}$ und wir erhalten unter Ausnutzung von Beispiel 4.1 für $\operatorname{Re} s > 0$

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{2i}\mathcal{L}\chi_i(s) - \frac{1}{2i}\mathcal{L}\chi_{-i}(s) = \frac{1}{2i} \frac{1}{s-i} - \frac{1}{2i} \frac{1}{s+i} = \frac{s+i-s-i}{2i(s-i)(s+i)} = \frac{1}{s^2+1}.$$

Hierfür schreiben wir wieder

$$\mathcal{L}(\sin)(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (4.6)$$

Beispiel 4.4 Sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \cosh t$. Wegen $|\cosh x| \leq e^x$ für alle $x \in [0, \infty)$ gilt $f \in L^1_\nu(0, \infty)$ für alle $\nu > 1$. Da

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

gilt $f = \frac{1}{2}\chi_1 + \frac{1}{2}\chi_{-1}$, und wir erhalten unter Ausnutzung von Beispiel 4.1 und der Linearität aus Satz 4.1 für $\operatorname{Re} s > 1$

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\chi_1(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\chi_{-1}(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} = \frac{s+1+s-1}{2(s-1)(s+1)} = \frac{s}{s^2-1}.$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\cosh)(s) = \frac{s}{s^2-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1.} \quad (4.7)$$

Satz 4.2. (Dämpfungssatz) Seien $\nu \in \mathbb{R}$, $f \in L^1_\nu(0, \infty)$, $a, s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(a+s) \geq \nu$. Dann gilt mit der Funktion χ_{-a} aus (4.2)

$$\boxed{\mathcal{L}(\chi_{-a}f)(s) = (\mathcal{L}f)(s+a).}$$

Beweis.

$$\mathcal{L}(\chi_{-a}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} \chi_{-a}(t) f(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{-at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t} f(t) dt = \mathcal{L}f(s+a).$$

□

Eine Multiplikation mit einer Exponentialfunktion wird also in eine Verschiebung im Bildbereich umgewandelt.

Beispiel 4.5 Seien $a, s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(a+s) > 0$. Dann gilt unter Verwendung von Beispiel 4.2

$$\mathcal{L}(\chi_{-a} \cos)(s) = (\mathcal{L} \cos)(s+a) = \frac{s+a}{1+(s+a)^2}.$$

Satz 4.3. (Verschiebungssätze) Seien $\nu \in \mathbb{R}$, $f \in L^1_\nu(0, \infty)$, $h \geq 0$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s \geq \nu$. Dann gilt mit der Konvention $f(t) = 0$ für $t < 0$:

$$\boxed{\begin{aligned} (\mathcal{L}f(\cdot - h))(s) &= e^{-hs} (\mathcal{L}f)(s) \\ (\mathcal{L}f(\cdot + h))(s) &= e^{hs} \left((\mathcal{L}f)(s) - \int_0^h e^{-st} f(t) dt \right). \end{aligned}}$$

Beweis. Für die erste Behauptung substituieren wir $x = t - h$, $dx = dt$ und erhalten

$$(\mathcal{L}f(\cdot - h))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t-h) dt = \int_{-h}^\infty e^{-s(x+h)} f(x) dx = e^{-sh} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = e^{-sh} \mathcal{L}f(s).$$

Im zweiten Integral substituieren wir $x = t + h$, $dx = dt$ und rechnen

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f(\cdot + h))(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t+h) dt = \int_h^\infty e^{-s(x-h)} f(x) dx \\ &= e^{sh} \left(\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx - \int_0^h e^{-sx} f(x) dx \right) = e^{sh} \left(\mathcal{L}f(s) - \int_0^h e^{-st} f(t) dt \right). \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.6 Sei

$$f_h(t) = \begin{cases} 0, & t < h \\ 1, & t \geq h \end{cases}$$

mit $h > 0$. f ist die Verschiebung der Funktion $g(t) = 1$, unter Beachtung der Konvention $g(t) = 0$ für $t < 0$ gilt nämlich $f(t) = g(t - h)$. Daher finden wir wegen (4.4)

$$\mathcal{L}f(s) = (\mathcal{L}g(\cdot - h)) = e^{-sh} \mathcal{L}g(s) = \frac{e^{-sh}}{s}.$$

Satz 4.4. (Ähnlichkeitssatz) Seien $v \in \mathbb{R}$, $f \in L_v^1(0, \infty)$, $a > 0$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s \geq v$. Dann gilt

$$\boxed{\mathcal{L}(f(at))(s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}f\left(\frac{s}{a}\right).}$$

Beweis. Wir substituieren $x = at$, $dx = a dt$ und erhalten

$$\mathcal{L}(f(at))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt = \int_0^\infty e^{-sx/a} f(x) \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-(s/a)x} f(x) dx = \frac{1}{a} \mathcal{L}f\left(\frac{s}{a}\right).$$

□

Beispiel 4.7 Sei $a > 0$. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 0$ entsprechend 4.5

$$(\mathcal{L}(\cos(at)))(s) = \frac{1}{a} \frac{s/a}{(s/a)^2 + 1} = \frac{s}{a^2 + s^2}.$$

Satz 4.5. (Multiplikationssatz) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $p_n(t) := t^n$. Falls $p_k f \in L_v^1(0, \infty)$ für $k = 0, \dots, n$, so gilt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s \geq v$

$$\boxed{\mathcal{L}(p_n f)(s) = (-1)^n (\mathcal{L}f)^{(n)}(s).}$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage für $n = 1$. Mehrfache Anwendung ergibt dann die allgemeine Formel. Differentiation der Definition (4.1) nach s ergibt

$$(\mathcal{L}f)'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty (-t) e^{-st} f(t) dt = -\mathcal{L}(tf(t))(s).$$

□

Beispiel 4.8 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 0$. Dann gilt für $p_n(t) = t^n$ wegen (4.4)

$$(\mathcal{L}p_n)(s) = (-1)^n (\mathcal{L}1)^{(n)}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Allgemeiner gilt für $\operatorname{Re} \alpha > 0$

$$\mathcal{L}(p_{\alpha-1})(s) = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha},$$

wobei $p_{\alpha-1}(t) = t^{\alpha-1}$ und

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

die *Gamma-Funktion* ist.

Satz 4.6. (Integrationssatz) Seien $\nu > 0$, $f \in L^1_\nu(0, \infty)$ und $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, d.h. F ist eine Stammfunktion von f . Dann ist $F \in L^1_\nu(0, \infty)$ und für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s \geq \nu$ gilt

$$(\mathcal{L}F)(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}f(s).$$

Beweis. Wir vertauschen die Integrationsreihenfolge:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}F)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(x) dx dt = \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-st} f(x) dt dx \\ &= \int_0^\infty f(x) \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \Big|_x^\infty dx = \int_0^\infty \frac{1}{s} e^{-sx} f(x) dx = \frac{1}{s} (\mathcal{L}f)(s) \end{aligned}$$

□

Satz 4.7. (Differentiationssatz) Sei $n \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{R}$ und f sei zusätzlich n -mal stetig differenzierbar mit $f^{(j)} \in L^1_\nu(0, \infty)$ für $j = 0, \dots, n$. Außerdem besitze $f^{(j)}$ einen rechtsseitigen Grenzwert in 0 für alle $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Dann gilt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s \geq \nu$

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^n (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} f^{(j)}(0+). \quad (4.8)$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage für $n = 1$, mehrfache Anwendung liefert dann die Formel für die n -te Ableitung.

$$(\mathcal{L}f')(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-s) e^{-st} f(t) dt = -f(0+) + s \mathcal{L}f(s)$$

□

Beispiel 4.9 Sei $f(t) = \cosh t$. Dann ist $f'(t) = \sinh t$ und wir erhalten unter Verwendung von Beispiel 4.4

$$\mathcal{L}(\sinh)(s) = s \mathcal{L}(\cosh)(s) - \cosh 0 = s \frac{s}{s^2 - 1} - 1 =$$

und damit

$$\mathcal{L}(\sinh)(s) = \frac{1}{s^2 - 1}, \quad \operatorname{Re} s > 1. \quad (4.9)$$

Die *Faltung* zweier Funktionen $f, g \in L^1_\nu(0, \infty)$ wird definiert durch

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

Dies ist dasselbe wie die in (3.3) definiert Faltung, wenn man die Konvention $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$ annimmt.

Satz 4.8. (Faltungssatz) Sei $\nu \in \mathbb{R}$ und $f, g \in L^1_\nu(0, \infty)$. Dann ist auch $f * g \in L^1_\nu(0, \infty)$ und für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s \geq \nu$ gilt

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s) \mathcal{L}g(s). \quad (4.10)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} (f * g)(t) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(t-u)g(u) du dt \\
&= \int_0^\infty g(u) \int_u^\infty e^{-st} f(t-u) dt du \\
&= \int_0^\infty g(u) \int_0^\infty e^{-s(z+u)} f(z) dz du \\
&= \int_0^\infty g(u) e^{-su} \int_0^\infty e^{-sz} f(z) dz du \\
&= \int_0^\infty g(u) e^{-su} (\mathcal{L}f)(s) du \\
&= (\mathcal{L}f)(s) \int_0^\infty g(u) e^{-su} du \\
&= (\mathcal{L}f)(s) (\mathcal{L}g)(s)
\end{aligned}$$

□

Wir widmen uns nun der Umkehrung der Laplacetransformation.

Wie bei der Fouriertransformation gibt es auch für die Laplacetransformation eine explizite Umkehrformel. Diese erfordert allerdings komplexe Kurvenintegration entlang einer Geraden in der Konvergenzhalbebene und wird oft mit Hilfe des Residuensatzes der komplexen Funktionentheorie ausgewertet.

Satz 4.9. (Komplexe Umkehrformel) Seien $v \in \mathbb{R}$ und $f \in L^1_v(0, \infty)$ stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt für $y \in \mathbb{R}$ mit $y > v$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{y-iR}^{y+iR} e^{st} (\mathcal{L}f)(s) ds = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)), & t > 0, \\ \frac{1}{2}f(0+), & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Eine andere Umkehrformel kann durch folgenden Satz gewonnen werden.

Satz 4.10. Sei

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{s^{\lambda_k}}$$

mit $a_k \in \mathbb{C}$ und $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ absolut konvergent für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $|s| \geq v$, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a_k}{s^{\lambda_k}} \right| < \infty.$$

Dann ist F die Laplacetransformierte der Funktion f gegeben durch

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^{\lambda_k-1}}{\Gamma(\lambda_k)}.$$

Beweis. Die Voraussetzungen gestatten, dass die Laplacetransformierte der Reihe gliedweise gebildet wird. Wir wenden dann Beispiel 4.8 an. $\square$

Für die Praxis wichtiger ist folgendes Vorgehen: Die Bildfunktion wird mit Hilfe der Partialbruchzerlegung in einfacher zu handhabende Bestandteile aufgespalten. Die inversen Laplacetransformierten der einzelnen Summanden sind tabelliert.

Beispiel 4.10 Sei $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s(s+a)}$ mit $a \neq 0$. Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{1}{s(s+a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a},$$

es folgt

$$1 = A(s+a) + Bs = (A+B)s + Aa.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$A+B=0, \quad Aa=1,$$

so dass $A=1/a$ und $B=-1/a$ gilt. Rücktransformation von

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{as} - \frac{1}{a(s+a)}$$

ergibt

$$f(t) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a}e^{-at} = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}).$$

4.2. Anwendung auf partielle Differentialgleichungen

Der Anwendung der Laplacetransformation auf partielle Differentialgleichung liegen dieselben Prinzipien zugrunde wie bei der Fouriertransformation. Wir wenden die Transformation nur bezüglich einer der Variablen an und vermerken diese als Index am Operatorsymbol (z. B. $\mathcal{L}_t$, wenn t transformiert wird). Dank Satz 4.7 gibt es dann bezüglich dieser transformierten Variablen keine Ableitungen mehr, es entsteht also eine gewöhnliche Differentialgleichung (bzw. eine partielle Differentialgleichung mit weniger Variablen).

Beispiel 4.11 Wir betrachten die Wärmeleitung im halbbunendlichen Medium bei vorgeschriebener Temperaturverteilung im Nullpunkt beschrieben durch

$$u_t = ku_{xx} \quad t, x > 0, \tag{4.11}$$

$$u(0, x) = 0, \tag{4.12}$$

$$u(t, 0) = f(t), \tag{4.13}$$

$$u(t, x) \rightarrow 0 \quad t \in (0, \infty), x \rightarrow \infty, \tag{4.14}$$

$$f(0) = 0.$$

Im folgenden schreiben wir $v(s, x) = (\mathcal{L}_t u)(s, x)$. Nach dem Differentiationssatz 4.7 erhalten wir unter Verwendung von (4.12)

$$(\mathcal{L}_t u_t)(s, x) = s(\mathcal{L}_t u)(s, x) - u(0, x) = sv(s, x).$$

Da die Laplacetransformation nur auf die Zeit wirkt, gilt

$$(\mathcal{L}_t u_{xx})(s, x) = v_{xx}(s, x).$$

Daher liefert eine Transformation der Wärmeleitungsgleichung (4.11)

$$sv(s, x) = kv_{xx}(s, x),$$

bei zunächst festgehaltenem s ist dies eine gewöhnliche Differentialgleichung, die wir durch einen Exponentialansatz $v(s, x) = e^{\lambda x}$ lösen können. Die charakteristische Gleichung

$$s = k\lambda^2$$

hat die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{s}{k}},$$

so dass die allgemeine Lösung dieser Familie von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$v(s, x) = c_1(s)e^{-x\sqrt{s/k}} + c_2(s)e^{x\sqrt{s/k}}$$

ist. Aus der Abklingbedingung (4.14) ergibt sich $v(s, x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ und damit $c_2(s) = 0$. Aus der Randbedingung (4.13) ergibt sich $v(s, 0) = \mathcal{L}f(s)$ und damit $c_1(s) = (\mathcal{L}f)(s)$. Daher ist

$$v(s, x) = e^{-x\sqrt{s/k}}(\mathcal{L}f)(s),$$

Man kann nachrechnen (dass ist allerdings nicht so einfach), dass

$$\mathcal{L}_s^{-1} \left(e^{-x\sqrt{s/k}} \right) (s) = \frac{x}{2\sqrt{\pi k t^{3/2}}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Entsprechend des Faltungssatzes ergibt sich dann im Originalbereich die Lösung als Faltung von f mit dieser Funktion:

$$u(t, x) = \int_0^t f(t - \tau) \frac{x}{2\sqrt{\pi k \tau^{3/2}}} e^{-\frac{x^2}{4k\tau}} d\tau.$$

Beispiel 4.12 Die Wärmeleitung im halbumendlichen Medium bei vorgeschriebenem Wärmefluss im Nullpunkt

$$u_t = ku_{xx} \quad t, x > 0, \quad (4.15)$$

$$u(0, x) = 0, \quad (4.16)$$

$$-\alpha u_x(t, 0) = g(t), \quad (4.17)$$

$$u(t, x) \rightarrow 0 \quad t \in (0, \infty), x \rightarrow \infty, \quad (4.18)$$

Für die Laplacetransformierte $v(s, x) = (\mathcal{L}_t u)(s, x)$ der Lösung erhalten wir wie im Beispiel 4.11 die allgemeine Lösung

$$v(s, x) = c_1(s)e^{-x\sqrt{s/k}} + c_2(s)e^{x\sqrt{s/k}}.$$

(4.18) impliziert wieder $c_2(s) = 0$, während eine Transformation von (4.17) auf

$$-\alpha v_x(s, 0) = \mathcal{L}g(s)$$

führt. Wegen

$$v_x(s, 0) = -\sqrt{\frac{s}{k}}c_1(s)$$

ist

$$c_2(s) = \sqrt{\frac{k}{s}} \frac{\mathcal{L}g(s)}{\alpha}$$

und wir erhalten

$$v(s, x) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{s}} (\mathcal{L}g)(s) e^{-x\sqrt{s/k}}.$$

Ohne Rechnung sei nun mitgeteilt, dass

$$\mathcal{L}_s^{-1} \left(\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{s}} e^{-x\sqrt{s/k}} \right) (t) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{\pi}} t^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4kt}},$$

so dass die Lösung durch das Faltungsintegral

$$u(t, x) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{\pi}} \int_0^t g(t - \tau) \tau^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4k\tau}} d\tau$$

ausgedrückt werden kann.

A. Partielle Ableitungen und Operatoren der Vektoranalysis

Sei u eine reellwertige Funktion, die in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist, also $u : G \rightarrow \mathbb{R}$. Die *partielle Ableitung* von u nach der Variablen x_k in einem Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$ ist die gewöhnliche Ableitung der partiellen Funktion $x_k \mapsto f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$, bei der die übrigen Variablen $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ festgehalten werden. Bezeichnet wird die partielle Ableitung mit

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)$$

oder $u_{x_k}(x)$, auch $\partial_{x_i} u(x)$ oder $\partial_i u(x)$ sind üblich. Leitet man die Funktion u mehrfach ab, z. B. zuerst nach x_k und dann nach x_l , so schreibt man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)$$

bzw.

$$u_{x_k x_l} := (u_{x_k})_{x_l}.$$

Man beachte die unterschiedliche Reihenfolge von x_k und x_l in beiden Bezeichnungsweisen. Ist allerdings u zweimal stetig partiell differenzierbar, so sagt uns der *Satz von Schwarz*, dass es nicht auf die Reihenfolge der Differentiation ankommt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}.$$

In dieser Vorlesung wird die Anwendbarkeit des Satzes von Schwarz meist stillschweigend vorausgesetzt.

Die *Ordnung* einer (einfachen oder mehrfachen) partiellen Ableitung gibt an, wie oft die Funktion u insgesamt abgeleitet wurde, d.h. eine Ableitung der Ordnung k hat die Gestalt

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad k_1 + \dots + k_n = k.$$

Der Vektor aus den partiellen Ableitungen ist der *Gradient* von u , geschrieben

$$\text{grad } u := (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}).$$

Daneben ist die Bezeichnung ∇u für den Gradient sehr verbreitet. Der Operator

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad (\text{A.1})$$

ist dabei der sogenannte *Nablaoperator*.

Ist $v \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor (d.h. für seinen Betrag gilt $|v| = 1$), so führt man die *Richtungsableitung* in Richtung v mittels

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x + tv) - u(x)}{t}$$

ein. Die Richtungsableitung kann berechnet werden als Skalarprodukt zwischen dem Vektor v und dem Gradient von u :

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x) = v \cdot \text{grad } u(x). \quad (\text{A.2})$$

Alle diese Begriffe lassen sich anschaulich deuten: Die partielle Ableitung nach x_k ist gerade der Anstieg einer Tangente an den Graph von u parallel zu einer der Koordinatenebenen. Die Richtungsableitung ist der Anstieg einer Tangente an den Graph von u in Richtung v . Derjenige Einheitsvektor v , für den die Richtungsableitung (A.2) am größten wird, ist gerade der auf Länge 1 normierte Gradient. Daher ist der Gradient $\text{grad } u(x)$ in jedem Punkt $x \in G$ ein Vektor, der in die Richtung des größten Anstiegs einer Tangente an den Graph von u zeigt.

Eine Veranschaulichung dieser Zusammenhänge für $n = 2$ findet sich in Abbildung A.1. Statt x_1, x_2 sollen die Variablen hier einfach x und y heißen. Die partielle Ableitung u_x ist dann der Anstieg der gelben Tangente, u_y ist der Anstieg der grünen Tangente. Den größten Anstieg hat die rote Tangente, sie zeigt in Richtung des Gradienten $\text{grad } u$.

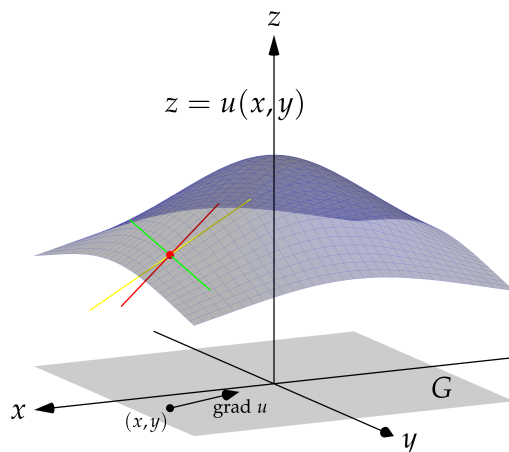


Abbildung A.1: Graph von $z = u(x, y)$ und Interpretation der partiellen Ableitungen

Ein *Vektorfeld* f ordnet jedem Punkt des Gebietes $G \subset \mathbb{R}^n$ einen Vektor im $\mathbb{R}^n$ zu, d.h. $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an dass $f = (f_1, \dots, f_n)$, wobei jede Komponente f_k eine reellwertige Funktion auf G ist. Die *Divergenz* des Vektorfeldes f ist die skalare Funktion

$$\text{div } f := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}. \quad (\text{A.3})$$

Formal kann man die Divergenz auch erhalten, indem man das Skalarprodukt des Nablaoperators (A.1) mit dem Vektorfeld f bildet: $\operatorname{div} f = \nabla \cdot f$.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Divergenz ist der *Satz von Gauß* (auch *Divergenzsatz* genannt): Für ein glatt berandetes Gebiet G und ein auf dem Abschluß $\overline{G} := G \cup \partial G$ definiertes glattes Vektorfeld f gilt

$$\int_G \operatorname{div} f(x) dx = \int_{\partial G} f \cdot d\vec{\eta} \quad (\text{A.4})$$

Dabei steht auf der linken Seite von (A.4) ein Volumenintegral über das n -dimensionale Volumen des Gebietes, während auf der rechten Seite ein Oberflächenintegral zweiter Art über die $(n-1)$ -dimensionale Oberfläche von G steht. Dieses Oberflächenintegral heißt auch der *Fluss* von f durch ∂G . Für das *vektorielle Oberflächenelement* $d\vec{\eta}$ gilt dabei

$$d\vec{\eta} = n d\eta$$

wobei n der nach außen orientierte Normalenvektor zu ∂G ist und $d\eta$ das *skalare Oberflächenelement*.

Ist f beispielsweise das Geschwindigkeitsfeld eines strömenden Mediums (Flüssigkeit oder Gas), stellt dieses Integral das pro Zeiteinheit über den Gebietsrand nach außen fließende Flüssigkeits- bzw. Gasvolumen dar (kann auch negativ sein). Was abfließt muß im Inneren entstehen, daher kann man die Divergenz eines Vektorfeldes auch als seine *Quelldichte* deuten.

Wendet man die Divergenz auf den Gradienten einer mindestens zweifach differenzierbaren Funktion u an, erhält man

$$\Delta u := \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}. \quad (\text{A.5})$$

Der hierdurch definierte Operator Δ heißt *Laplaceoperator*. Er ist also die Summe der zweiten partiellen Ableitungen nach allen Variablen. Wegen der schon erwähnten Darstellungen $\operatorname{grad} u = \nabla u$ und $\operatorname{div} f = \nabla \cdot f$ schreibt man mitunter auch ∇^2 für den Laplaceoperator.

In vielen Anwendungen lässt sich eine der Variablen, von denen u abhängt, als Zeit deuten, die anderen als räumliche Variable. Es ist eine Konvention, dass sich der Laplaceoperator immer nur auf die räumlichen Variablen bezieht und keine Zeitableitungen gebildet werden. Konkret heißt das:

- Falls $u = u(x)$ oder $u = u(t, x)$ gilt

$$\Delta u = u_{xx}. \quad (\text{A.6})$$

- Falls $u = u(x, y)$ oder $u = u(t, x, y)$ gilt

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}. \quad (\text{A.7})$$

- Falls $u = u(x, y, z)$ oder $u = u(t, x, y, z)$ gilt

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}. \quad (\text{A.8})$$

Sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $G \subset \mathbb{R}^3$ nun ein dreidimensionales Vektorfeld, also $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ mit drei reellwertigen Komponentenfunktionen f_1, f_2, f_3 . Unter der *Rotation* von f versteht man das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Formal kann man die Rotation auch als das Vektorprodukt des Nablaoperators $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$ mit dem Vektorfeld f erhalten: $\operatorname{rot} f = \nabla \times f$.

Für jedes Vektorfeld f kann man leicht die Identität

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} f = \operatorname{grad} \operatorname{div} f - \Delta f \quad (\text{A.10})$$

nachrechnen.

Ist das Vektorfeld f der negative³ Gradient einer (zweifach stetig differenzierbaren) Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$, also $f = -\operatorname{grad} u = -(u_x, u_y, u_z)^T$, so gilt

$$\operatorname{rot} f = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_{zy} - u_{yz} \\ u_{xz} - u_{zx} \\ u_{yx} - u_{xy} \end{pmatrix} = 0.$$

Dieser Schluß lässt sich in einfach zusammenhängenden Gebieten G umkehren: Erfüllt das Vektorfeld f die Bedingung $\operatorname{rot} f = 0$, so hat es die Darstellung $f = -\operatorname{grad} u$ mit einer geeigneten Funktion u . Diese Funktion u nennt man dabei *Potential* und f heißt ein *Potentialfeld* oder *konservatives Vektorfeld*.

B. Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine *lineare gewöhnliche Differentialgleichung* n -ter Ordnung ist von der Form

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = b(t). \quad (\text{B.1})$$

Dabei wurde durch eine Division der Koeffizient vor $x^{(n)}(t)$ zu 1 gemacht. Ist hier $b(t) = 0$, so heißt die Gleichung *homogen*, sonst heißt sie *inhomogen*. Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung bilden einen Vektorraum der Dimension n . Jede Basis dieses Vektorraums heißt *Fundamentalsystem*. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung besteht damit aus allen

³Das Minuszeichen hat nur traditionelle Gründe, keine inhaltlichen.

Linearkombinationen eines Fundamentalsystems. Um zu entscheiden, ob Lösungen $x_1(t), \dots, x_n(t)$ ein Fundamentalsystem bilden, kann man die *Wronski-Determinante*

$$W(t) := \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

heranziehen. So liegt im Falle $W(t) \neq 0$ für ein (und damit alle) t ein Fundamentalsystem vor, andernfalls ist $W(t) \equiv 0$.

Besonders einfach lässt sich ein Fundamentalsystem berechnen, wenn die homogenen Gleichung konstante Koeffizienten hat, also von der Form

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0x(t) = 0 \quad (\text{B.2})$$

mit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ist. Wir machen dazu den *Exponentialansatz* $x(t) = e^{\mu t}$. Es zeigt sich, dass diese Exponentialfunktion genau dann Lösung von (B.2) ist, wenn μ der *charakteristischen Gleichung*

$$\mu^n + a_{n-1}\mu^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (\text{B.3})$$

genügt. Da es sich hierbei um eine Polynomgleichung handelt, hat sie stets n Lösungen, die aber zusammenfallen können. Seien $\mu_1, \dots, \mu_m$ die paarweise verschiedenen Nullstellen, und $n_1, \dots, n_m$ ihre *Vielfachheiten*, so dass $n_1 + \dots + n_m = n$. Dann bilden die Funktionen

$$x_{k,j}(t) := t^j e^{\mu_k t}, \quad k = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n_k - 1 \quad (\text{B.4})$$

ein Fundamentalsystem. Dies gilt auch dann, wenn $\mu_k = \eta_k + i\omega_k$ komplex ist. Da man aber meist die reellen Lösungen benötigt, nimmt man in diesem Fall den Real- und den Imaginärteil der komplexwertigen Lösung (B.5) in das Fundamentalsystem auf, wegen $e^{\mu_k t} = e^{(\eta_k + i\omega_k)t} = e^{\eta_k t}(\cos(\omega_k t) + i \sin(\omega_k t))$ also die Funktionen

$$u_{k,j}(t) := t^j e^{\eta_k t} \cos(\omega_k t), \quad v_{k,j}(t) := t^j e^{\eta_k t} \sin(\omega_k t), \quad j = 0, \dots, n_k - 1 \quad (\text{B.5})$$

Man beachte, dass mit μ_k auch $\bar{\mu}_k = \eta_k - i\omega_k$ Nullstelle von (B.3) ist und (bis auf das Vorzeichen) dieselben Lösungsfunktionen liefert.

Literatur

- [1] Adzievski, Kuzman und Abul Hasan Siddiqi: *Introduction to partial differential equations for scientists and engineers using Mathematica*. CRC Press, Boca Raton, Fla. [u.a.], 2014.
- [2] Arens, T., F. Hettlich, Chr. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger und H. Stachel: *Mathematik*. Spektrum Akademischer Verlag, 2008.
- [3] Asmar, Nakhlé H.: *Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*. Pearson Prentice Hall, 2. Auflage, 2005.
- [4] Bärwolff, G.: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure*. Springer Spektrum, 2017.
- [5] Bernatz, Richard A.: *Fourier series and numerical methods for partial differential equations*. Wiley, Hoboken, NJ, 2010.
- [6] Brown, James Ward und Ruel Vance Churchill: *Fourier series and boundary value problems*. McGraw-Hill Higher Education, Boston, Mass. [u.a.], 8. Auflage, 2014.
- [7] Budak, B. M., A. A. Samarskii und A. N. Tikhonov: *A collection of problems on mathematical physics*, Band 52 der Reihe *International series of monographs in pure and applied mathematics*. Pergamon Press, Oxford [u.a.], 1964.
- [8] DuChateau, Paul und David W. Zachmann: *Schaum's outlines Partial differential equations*. Schaum's outline series. McGraw-Hill, New York [u.a.], 3. Auflage, 2011.
- [9] Epstein, Marcelo: *Partial differential equations*. Mathematical engineering. Springer-Verlag, 1. Auflage, 2017.
- [10] Farlow, Stanley J.: *Partial differential equations for scientists and engineers*. Dover Publications, Inc., New York, 1993.
- [11] Farlow, Stanley J.: *Solution Manual for Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Dover Publications, 2020.
- [12] Fischer, Helmut und Helmut Kaul: *Mathematik für Physiker*, Band 2. B. G. Teubner Verlag, 3. Auflage, 2008.
- [13] Goldhorn, Karl Heinz und Hans Peter Heinz: *Mathematik für Physiker*, Band 3. Springer, 2008.
- [14] Hattori, Harumi: *Partial differential equations*. World Scientific, Hackensack, NJ [u.a.], 2013.
- [15] Henner, Victor, Tatyana Belozerova und Kyle Forinash: *Mathematical methods in physics*. Peters, Wellesley, Mass., 2009.
- [16] Henner, Victor, Tatyana Belozerova und Alexander Nepomnyashchy: *Partial differential equations. Analytical Methods and Applications*. CRC Press, Boca Raton, Fla. [u.a.], 2020.
- [17] Hillen, Thomas, I. Ed Leonard und Henry van Roessel: *Partial differential equations*. Wiley, Hoboken, NJ, 2012.
- [18] Hungerbühler, Norbert: *Einführung in partielle Differentialgleichungen für Ingenieure, Chemiker und Naturwissenschaftler*. vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 2. Auflage, 2011.

- [19] Kneschke, Alfred: *Differentialgleichungen und Randwertprobleme. Bd. II: Partielle Differentialgleichungen*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1961.
- [20] Kneschke, Alfred: *Differentialgleichungen und Randwertprobleme. Bd. III: Anwendungen der Differentialgleichungen*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1968.
- [21] Langemann, Dirk und Cordula Reisch: *So einfach ist Mathematik - Partielle Differenzialgleichungen für Anwender*. Springer Spektrum, Berlin, 2018.
- [22] Logan, J. David: *Applied partial differential equations*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2. Auflage, 2004.
- [23] Markowich, Peter A.: *Applied partial differential equations: a visual approach*. Springer-Verlag, 2007.
- [24] Meinhold, Peter und Eberhard Wagner: *Partielle Differentialgleichungen*, Band 8 der Reihe *Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte*. Teubner, Leipzig, 6. Auflage, 1990.
- [25] O'Neil, Peter V.: *Beginning partial differential equations*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 3. Auflage, 2014.
- [26] Pivato, Marcus: *Linear partial differential equations and Fourier theory*. Cambridge Univ. Press, Cambridge [u.a.], 1. Auflage, 2010.
- [27] Snider, Arthur David: *Partial differential equations*. Dover books on mathematics. Dover Publ., Mineola, NY, 2006.
- [28] Tychonoff, A. N. und A. A. Samarski: *Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, Band 39 der Reihe *Hochschulbücher für Mathematik*. Dt. Verl. der Wiss., Berlin, 1959.

Stichwortverzeichnis

- Ähnlichkeitssatz, 66
- Abklingbedingungen, 36
- Anfangs-Randwertproblem, 29
- Anfangswertproblem, 29
- Balkengleichung, 24
- Beschränktheitsbedingungen, 35
- Besselfunktion erster Art, 52
- Besselfunktion zweiter Art, 52
- Besselsche Differentialgleichung, 49
 - parametrisierte, 51
- biharmonisch, 24
- Bildfunktion, 55
- charakteristische Gleichung, 75
- Dämpfungssatz, 65
- Deltadistribution, 56
- Differentialgleichung
 - partielle, 7
- Differentiationssatz, 67
- Diffusionsgleichung, 14
- Distribution, 56
- Divergenz, 72
- Divergenzsatz, 73
- Eigenfunktion, 38
- Eigenraum, 38
- Eigenwert, 38
- elliptisch, 9
- Eulersche Gleichungen, 22
- Exponentialansatz, 75
- Faltung, 58, 67
- Faltungssatz, 67
- fastlinear, 9
- Ficksches Gesetz, 14
- Fluss, 73
- Formel von d'Alembert, 60
- Fourier-Bessel-Reihe, 53
- Fouriersche Methode, 36
- Fouriersche Umkehrformel, 58
- Fouriersches Gesetz, 11, 12
- Fouriertransformation, 55
- Fouriertransformierte, 56
- Fundamentalsystem, 74
- Gamma-Funktion, 66
- Gradient, 71
- Helmholtzgleichung, 50
 - homogen, 8, 74
- Hooksches Gesetz, 17
- hyperbolisch, 9
- inhomogen, 8, 74
- instationär, 7
- Integraltransformation, 55
- Integrationssatz, 67
- inversen Fouriertransformation, 57
- Kernfunktion, 55
- korrekt gestellt, 28
- Kroneckersymbol, 42
- Kugelkoordinaten, 27
- Lagrangesche Identität, 40
- Laplacegleichung, 14, 19, 21
- Laplaceoperator, 73
- Laplacetransformation, 63
- Laplacetransformierte, 63
- linear, 8
- lineare gewöhnliche Differentialgleichung, 74
- Longitudinalschwingung, 18
- Maxwell-Gleichungen, 20
- Membrangleichung, 19
- Multiplikationssatz, 66
- Nablaoperator, 72
- Navier-Stokes-Gleichungen, 23
- Newtonsches Abkühlungsgesetz, 32
- Norm, 42
- Oberflächenelement
 - skalares, 73
 - vektorielles, 73
- Ordnung
 - einer partiellen Ableitung, 71
 - einer partiellen Differentialgleichung, 7
- Originalfunktion, 55
- orthogonal, 39

Orthonormalsystem, 42
 parabolisch, 9
 partielle Ableitung, 71
 partielle Fouriertransformation, 59
 Periodizitätsbedingungen, 35
 Plattengleichung, 24
 Poissonsgleichung, 14, 19, 21
 Poissonsche Integralformel, 61
 Polarkoordinaten, 24
 Potential, 74
 Potentialfeld, 74
 Potentialgleichung, 21
 Potentialströmung, 23
 quadratintegrale Funktion, 39
 quasilinear, 8
 Quelldichte, 73
 Quelle, 12
 Randbedingung, 30
 Dirichletsche, 30
 dritter Art, 32
 erster Art, 30
 Neumannsche, 30
 Robinsche, 32
 zweiter Art, 30
 Randwertaufgabe, 29
 Richtungsableitung, 72
 Rotation, 74
 Saitenschwingungsgleichung, 16
 gedämpfte, 17
 inhomogene, 17
 Satz von Gauß, 73
 Satz von Riemann-Lebesgue, 56
 Satz von Schwarz, 71
 Separationsverfahren, 36
 Skalarprodukt, 39
 Sobolewraum, 28
 stationär, 7
 Sturm-Liouville-Operator, 38
 Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgabe, 37
 Superposition, 44
 Telegraphengleichung, 17
 Torsionsschwingung, 18
 Umkehrformel
 komplexe, 68
 Vektorfeld, 72
 konservatives, 74
 verallgemeinerte Funktion, 56
 Verschiebungssätze, 65
 Vielfachheit, 75
 Wärmeübergangskoeffizient, 33
 Wärmeleitungsgleichung, 10
 dreidimensionale, 13
 eindimensionale, 12
 inhomogene, 12
 zweidimensionale, 13
 Wellengleichung
 dreidimensionale, 19
 eindimensionale, 16
 gedämpfte, 17
 zweidimensionale, 19
 Wronski-Determinante, 75